BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

LÊ ANH TUẤN

BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN $\mathcal{H}_\infty$ CHO MỘT SỐ LỚP HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ TRỄ

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 9 46 01 03

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2019

Luận án được hoàn thành tại: Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát

Phản biện 1: GS. TSKH. Nguyễn Hữu Dư, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc Gia Hà Nội
Phản biện 2: PGS. TS. Hà Tiến Ngoạn, Viện Toán học
Phản biện 3: PGS. TS. Trần Đình Kế, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Trường
họp tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội vào hồi
... giờ ... ngày ... tháng ... năm .....

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện: Thư viện Quốc Gia, Hà Nội
hoặc Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Lý thuyết ổn định là một nhánh quan trọng của lý thuyết định tính các hệ phương trình vi phân mà được nhà toán học người Nga A.M. Lyapunov khởi xướng từ những năm cuối thế kỷ XIX. Với bề dày lịch sử hơn một thế kỷ nhưng đến thời điểm này lý thuyết ổn định Lyapunov vẫn còn là một lĩnh vực nghiên cứu có sức lôi cuốn rất lớn của toán học với ngày càng nhiều ứng dụng quan trọng được tìm thấy trong cơ học, vật lý, hóa học, công nghệ thông tin, sinh thái, môi trường, v.v. (xem Gu et al. (2003), Hinrichsen và Pritchard (2010), Kolmanovskii và Myshkis (1999), Krasovskii (1963)).

Cùng với tính ổn định nghiệm, người ta còn quan tâm đến bài toán ổn định hóa hệ điều khiển và người ta bắt đầu nghiên cứu tính ổn định hóa được của hệ điều khiển từ những năm 1960. Mặt khác, trong các mô hình toán học (được xây dựng từ các bài toán kỹ thuật trong thực tiễn) thường xuất hiện độ trễ thời gian. Các đại lượng trễ đó hình thành một cách tự nhiên, không thể tránh khỏi trong quá trình truyền tải, xử lý dữ liệu và người ta chỉ ra được rằng sự hiện diện của nó sẽ ít nhiều ảnh hưởng đến dáng điệu và tính chất của hệ, trong đó có tính ổn định (xem Gu et al. (2003), Niculescu (2001)). Chính vì vậy, việc nghiên cứu tính ổn định và điều khiển cho các hệ có trễ là bài toán có ý nghĩa thực tế, đã và đang được nhiều học giả quan tâm trong những năm gần đây (xem Boyd et al. (1994), Duan và Yu (2013), Fridman (2014), Michiels và Niculescu (2014)).

Bên cạnh đó, các quá trình trong thực tiễn thường xảy ra một cách không chắc chắn (có sự xuất hiện của các đại lượng "nhiễu" hệ thống). Các nhiễu này có thể xuất hiện do sai số vận hành, do ảnh hưởng lẫn nhau giữa các thành tố trong hệ thống hoặc giữa các hệ thống khác nhau. Vì vậy, việc đòi hỏi phải biết chính xác tất cả các tham số của hệ trong mô hình là điều không tưởng hoặc rất khó vận dụng trong thực tế. Do đó, việc đánh giá tối ưu mức ảnh hưởng của nhiễu đối với đầu ra của hệ thống (bài toán $\mathcal{H}_\infty$) là bài toán có tính thời sự, được nhiều nhà toán học và kỹ sư quan tâm nghiên cứu. Các cách tiếp cận khác nhau đã được phát triển và một số lượng lớn các kết quả quan trọng về điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho nhiều lớp hệ có trễ đã được công bố trong thời gian qua (Petersen et al. (2000), Wu et al. (2010), Xu và Lam (2006), Zhou et al. (1995)). Tuy vậy còn nhiều vấn đề mở thú vị và quan trọng trong cả lý thuyết lẫn ứng dụng vẫn chưa được giải quyết, đặc

biệt là các kết quả hiện có về bài toán $\mathcal{H}_\infty$ cho các lớp hệ điều khiển có trễ tổng quát còn khá khiêm tốn và cần được tiếp tục nghiên cứu sâu hơn. Đó chính là động lực để chúng tôi thực hiện đề tài này.

2. TỔNG QUAN TÌNH HÌNH NGHIÊN CỨU

Hệ nơ-ron có trễ là một lớp hệ phương trình vi phân hàm đặc biệt, đã được nghiên cứu một cách rộng rãi trong hơn hai thập kỷ qua bởi những ứng dụng thành công của nó trong nhiều lĩnh vực như: bộ nhớ kết hợp (associative memory), nhận dạng và phân loại mẫu, xử lý tín hiệu, xử lý ảnh, giải các bài toán tối ưu, v.v. Do đó, lớp hệ đầu tiên được đề cập trong luận án về bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ là hệ nơ-ron có trễ biến thiên hỗn hợp:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t))) + W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + Bu(t) + C\omega(t) \\
z(t) &= Ex(t) + Mx(t-h(t)) + Nu(t), \quad t \geqslant 0, \\
x(t) &= \varphi(t),\ t \in [-d, 0], \quad d = \max\{h_2, k\},
\end{aligned} \tag{1}$$

ở đây $h(t)$, $k(t)$ là các hàm trễ của hệ thỏa mãn điều kiện $0 \leqslant h_1 \leqslant h(t) \leqslant h_2,\ 0 \leqslant k(t) \leqslant k$.

Năm 2009, bài toán ổn định mũ cho hệ nơ-ron

$$\dot{x}(t) = -(A+\Delta A(t))x(t)+(W_0+\Delta W_0(t))f(x(t))+(W_1+\Delta W_1(t))f(x(t-h(t)))$$

với hàm trễ $h(t)$ biến thiên liên tục dạng khoảng và có đạo hàm bị chặn đã được xét bởi Kwon và Park. Còn bài toán ổn định hóa được dạng mũ thì được các tác giả Phat, Trinh đề xuất vào năm 2010 cho hệ nơ-ron với trễ hỗn hợp

$$\dot{x}(t) = -Ax(t)+W_0 f(x(t))+W_1 g(x(t-h(t)))+W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds+Bu(t),$$

trong đó các hàm trễ $h(t)$, $k(t)$ được giả thiết thỏa mãn điều kiện: $0 \leqslant h(t) \leqslant h,\ \dot{h}(t) \leqslant \delta < 1,\ 0 \leqslant k(t) \leqslant k \quad \forall t \geqslant 0$. Không lâu sau đó, kết quả này được mở rộng sang trường hợp trễ rời rạc $h(t)$ là hàm liên tục, nhận giá trị trong một khoảng bởi hai tác giả Thuan, Phat (2012). Năm 2012, Sakthivel et al. đã xét bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho hệ nơ-ron có trễ hỗn hợp

(và không có trễ trong hàm quan sát)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -(A+\Delta A)x(t) + (W_0+\Delta W_0)f(x(t)) + (W_1+\Delta W_1)g(x(t-h(t)))\\ &\quad + (W_2+\Delta W_2)\int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds + u(t) + (C+\Delta C)\omega(t),\\ z(t) &= Ex(t),\end{aligned}$$

với các hàm trễ $h(t)$, $k(t)$ thỏa mãn: $0 \leqslant h(t) \leqslant h,\ \dot{h}(t) \leqslant \delta,\ 0 \leqslant k(t) \leqslant k \quad \forall t \geqslant 0$. Trong công trình này, các tác giả đã thu được tính ổn định hóa được dạng tiệm cận và điều kiện $\mathcal{H}_\infty$. Sang năm 2013, các tác giả Phat, Trinh tiếp tục nghiên cứu bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho hệ nơ-ron có trễ

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-\tau_1(t))) + Bu(t) + C\omega(t),\\ z(t) &= Ex(t) + Mh(x(t-\tau_2(t))) + Nu(t),\end{aligned}$$

với cả hai trường hợp được xét: các hàm trễ $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ là khả vi và có đạo hàm bị chặn trên bởi một số thực dương bé hơn 1 hoặc các hàm trễ là bị chặn nhưng không nhất thiết khả vi. Từ đó, các tác giả đã thu được tính ổn định hóa được dạng mũ và điều kiện $\mathcal{H}_\infty$ ứng với mỗi trường hợp.

Như vậy, các kết quả đã nêu ở trên về tính ổn định và điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ phần lớn đều bị hạn chế bởi giả thiết độ trễ là hàm khả vi và có đạo hàm bị chặn trên hoặc đơn giản chỉ là hàm bị chặn. Hiện nay việc nghiên cứu bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho lớp hệ phương trình (1) với độ trễ $h(t)$ liên tục, không đòi hỏi tính khả vi và nhận giá trị trong một khoảng nêu trên vẫn chưa nhận được sự quan tâm thích đáng của các nhà nghiên cứu. Trong bối cảnh đó, chúng tôi đề xuất bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho hệ (1).

Bài toán thứ hai được chúng tôi quan tâm trong luận án này là bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên dạng khoảng:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + A_d x(k-d(k)) + Bu(k) + G\omega(k),\\ z(k) &= Cx(k) + C_d x(k-d(k)), \quad k \in \mathbb{Z}_+,\\ x(k) &= \varphi(k), \quad k \in \{-d_2, -d_2+1, \ldots, 0\},\end{aligned} \tag{2}$$

ở đây hàm trễ $d(k)$ thỏa mãn điều kiện $0 < d_1 \leqslant d(k) \leqslant d_2 \ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$. Năm 2010, bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ rời rạc tuyến

tính không có trễ

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + G\omega(k), \\ z(k) &= Cx(k) + D_1u(k) + D_2\omega(k), \end{aligned}$$

được đề xuất bởi Wang et al. Cũng bài toán này cho hệ rời rạc phi tuyến chuyển mạch không có trễ được Xiang và Xiao nghiên cứu vào năm 2011. Đến năm 2012, Song et al. đã tiến thêm được một bước khi giải quyết được bài toán này cho hệ rời rạc tuyến tính chuyển mạch với trễ hằng

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\sigma(k)}x(k) + A_{d,\sigma(k)}x(k-d) + B_{\sigma(k)}u(k) + G_{\sigma(k)}\omega(k), \\ z(k) &= C_{\sigma(k)}x(k) + C_{d,\sigma(k)}x(k-d) + D_{\sigma(k)}u(k) + F_{\sigma(k)}\omega(k). \end{aligned}$$

Không lâu sau đó, kết quả này được mở rộng cho hệ rời rạc phi tuyến chuyển mạch có trễ hằng bởi Zong et al. (2015). Về tính ổn định và ổn định hóa trong thời gian hữu hạn cho hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên dạng khoảng

$$x(k+1) = Ax(k) + A_dx(k-d(k)) + Bu(k),$$

có hai công trình khá tiêu biểu mà được hai nhóm tác giả là Zuo et al. và Zhang et al. công bố tương ứng trong các năm 2013 và 2014.

Rõ ràng rằng các kết quả đã nêu ở trên về điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho các lớp hệ rời rạc tuyến tính cũng như phi tuyến đều bị hạn chế bởi giả thiết không có sự hiện diện của độ trễ hoặc có sự hiện diện của độ trễ nhưng chỉ đơn giản là hàm hằng. Hiện nay việc nghiên cứu bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phương trình (2) với độ trễ $d(k)$ thỏa điều kiện biến thiên dạng khoảng nêu trên vẫn chưa nhận được sự quan tâm của các nhà nghiên cứu. Trong bối cảnh đó, chúng tôi đề xuất bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ (2).

Bài toán thứ ba được hướng đến trong luận án này là bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron rời rạc suy biến có trễ:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + Wf(x(k)) + W_1g(x(k-d(k))) + Bu(k) + C\omega(k), \\ z(k) &= A_1x(k) + Dx(k-d(k)) + B_1u(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(k) &= \varphi(k),\ k \in \{-d_2, -d_2+1, \ldots, 0\}, \end{aligned} \tag{3}$$

ở đây trễ thời gian $d(k)$ được giả thiết biến thiên dạng khoảng như trong hệ (2). Việc nghiên cứu bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho hệ nơ-ron rời rạc có trễ

biến thiên dạng khoảng đã xuất hiện từ khá sớm với hai bài báo Lu et al. (2009) và Sakthivel et al. (2012). Tuy nhiên, tính ổn định trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ này chỉ mới được vài nhà nghiên cứu quan tâm gần đây. Cụ thể là, tính bị chặn trong thời gian hữu hạn cho hệ nơ-ron rời rạc với trễ biến thiên được Zhang et al. khảo sát vào năm 2014, còn tính ổn định trong thời gian hữu hạn cho hệ nơ-ron mờ rời rạc không có trễ được Bai et al. thu được vào năm 2015.

Hiện nay, việc nghiên cứu tính ổn định và điều khiển các hệ suy biến đang được phát triển mạnh theo cả hai hướng lý thuyết và ứng dụng. Chúng tôi xin điểm qua về tình hình nghiên cứu dành cho lớp hệ này như sau. Tính ổn định và ổn định hóa cho hệ (với bước nhảy Markov) suy biến rời rạc phi tuyến không có trễ được Song et al. xét đến năm 2012. Rất nhanh sau đó, kết quả này được phát triển tiếp cho hệ có trễ biến thiên trong Wang và Ma (2013). Về bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn thì loạt bài báo Zhang et al. (2014), Ma et al. (2015) và Ma et al. (2016) theo thứ tự đó đã xét bài toán này cho hệ suy biến rời rạc tuyến tính không có trễ, có trễ hằng và có trễ biến thiên một cách tương ứng. Một mô hình cho hệ nơ-ron suy biến rời rạc có thể được tìm thấy trong Hahanov và Rutkas (2009) và tính ổn định của hệ nơ-ron suy biến rời rạc với bước nhảy Markov được Ma và Zheng đề cập năm 2016.

Theo sự hiểu biết của chúng tôi thì, cho đến thời điểm hiện tại, việc nghiên cứu bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phương trình (3) với độ trễ $d(k)$ biến thiên dạng khoảng vẫn chưa nhận được sự quan tâm của các nhà nghiên cứu. Trong bối cảnh đó, chúng tôi đề xuất bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ (3).

3. MỤC ĐÍCH, ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Luận án tập trung vào việc nghiên cứu xây dựng các phiếm hàm kiểu Lyapunov–Krasovskii mới để thu được các tiêu chuẩn mới có ý nghĩa giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho các lớp hệ phương trình vi/sai phân hàm đã biết có cấu trúc trễ mở rộng và các lớp hệ phương trình vi/sai phân hàm có cấu trúc tổng quát hơn. Cụ thể như sau:

• **Nội dung 1:** Nghiên cứu bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho lớp hệ nơ-ron có trễ biến thiên hỗn hợp.

• **Nội dung 2:** Nghiên cứu bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn

cho lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng.

• **Nội dung 3:** Nghiên cứu bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron rời rạc suy biến có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Luận án phát triển kỹ thuật sử dụng phiếm hàm Lyapunov–Krasovskii, kết hợp với một số công cụ hiện có trong giải tích, đại số tuyến tính, phương trình vi phân thường và phương trình vi phân suy biến để thực hiện các nội dung nghiên cứu nêu trên.

5. KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN

Luận án đã đạt được những kết quả chính sau đây:

• Thiết kế được một hàm điều khiển phản hồi giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho lớp hệ nơ-ron có trễ biến thiên hỗn hợp.

• Đề xuất được các điều kiện đủ đảm bảo tính $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng. Từ đó thiết kế một hàm điều khiển phản hồi giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ này.

• Thiết lập được các kết quả tương ứng cho lớp hệ nơ-ron rời rạc suy biến có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng. Hơn nữa, với lớp hệ này, chúng tôi còn đồng thời chứng minh được tính chính quy, tính nhân quả và sự tồn tại duy nhất nghiệm của hệ trong lân cận của gốc.

6. BỐ CỤC CỦA LUẬN ÁN

Luận án có bố cục như sau. Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục các công trình đã công bố và danh mục Tài liệu tham khảo, luận án gồm 4 chương: Chương 1 tóm tắt một cách có hệ thống các kiến thức chuẩn bị. Chương 2 trình bày một kết quả về tính điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho lớp hệ nơ-ron có trễ biến thiên hỗn hợp. Chương 3 trình bày các kết quả về tính $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn và điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng. Chương 4 trình bày lời giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron rời rạc suy biến có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng cùng các kết quả liên quan.

Chương 1
MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này nhằm giới thiệu tóm tắt một số kết quả kinh điển trong lý thuyết hệ có trễ. Bài toán ổn định, ổn định hóa và bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ sẽ lần lượt được trình bày cùng một số kiến thức bổ trợ khác cần dùng cho các chương sau. Nội dung chủ yếu của chương được trích/dịch từ các nguồn tài liệu Hien (2010), Thanh (2015), Gu et al. (2003), Hale et al. (1993), Kharitonov (2013), Kolmanovskii và Myshkis (1999), Wu et al. (2010), Zhang và Chen (1998), Zhou et al. (1995).

1.1. Bài toán ổn định và ổn định hóa hệ phương trình có trễ

1.1.1. Bài toán ổn định

Trong mục này, trước hết chúng tôi trình bày các định lý về sự tồn tại duy nhất nghiệm địa phương và sự tồn tại duy nhất nghiệm toàn cục của hệ phương trình vi phân có trễ; sau đó là phát biểu của các khái niệm: ổn định, ổn định tiệm cận, ổn định mũ, v.v. cùng các tiêu chuẩn Lyapunov–Krasovskii đảm bảo tính ổn định tương ứng.

Tiếp theo, chúng tôi cung cấp các định nghĩa về tính ổn định và tính ổn định tiệm cận cho hệ phương trình sai phân có trễ.

1.1.2. Bài toán ổn định hóa

Trong mục này, trước hết chúng tôi trình bày các định nghĩa về tính ổn định hóa được và tính $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ của hệ điều khiển có trễ.

Tiếp theo là phần trình bày về định nghĩa tính ổn định hóa được của hệ điều khiển rời rạc có trễ.

1.2. Bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$

1.2.1. Không gian $\mathcal{H}_\infty$

Mục này nhằm giới thiệu định nghĩa của không gian $\mathcal{H}_\infty$ và công thức xác định chuẩn $\mathcal{H}_\infty$ của ma trận chuyển từ ω tới z.

1.2.2. Bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$

Mục này được dành để bàn về bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ tối ưu và bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ dưới tối ưu (suboptimal).

1.3. Bất đẳng thức ma trận tuyến tính

Phần lớn của mục được chúng tôi dành để giới thiệu khái niệm bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMI) và bài toán LMI tiêu chuẩn. Mục được khép lại với Bổ đề phần bù Schur nổi tiếng, mà thường được sử dụng như một công cụ hữu hiệu để biến đổi các bất đẳng thức ma trận phi tuyến về dạng LMI.

Chương 2
BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN $\mathcal{H}_\infty$ CHO LỚP HỆ NƠ-RON CÓ TRỄ BIẾN THIÊN HỖN HỢP

Chương này nhằm trình bày kết quả nhận được đầu tiên của luận án. Cụ thể là chúng tôi đã đề xuất được một điều kiện đủ giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho lớp hệ nơ-ron có trễ biến thiên hỗn hợp. Nội dung của chương được trích từ bài báo thứ nhất trong danh mục các công trình đã công bố của tác giả có liên quan đến luận án.

2.1. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

Xét mô hình mạng nơ-ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên hỗn hợp:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t))) + W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + Bu(t) + C\omega(t) \\
z(t) &= Ex(t) + Mx(t-h(t)) + Nu(t), \quad t \geqslant 0, \\
x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-d, 0],
\end{aligned} \tag{2.1}$$

ở đây $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái của mô hình mạng nơ-ron; $u(t) \in L^2([0,s], \mathbb{R}^m)$ $\forall s > 0$, là biến điều khiển đầu vào; $\omega(t) \in L^2([0,\infty), \mathbb{R}^r)$ là biến nhiễu/không chắc chắn đầu vào; $z(t) \in \mathbb{R}^s$ là hàm quan sát đầu ra của mô hình mạng nơ-ron; ma trận đường chéo $A = \mathrm{diag}\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}, \overline{a}_i > 0$ $\forall i = \overline{1,n}$ biểu thị sự tự hoàn ngược (self-feedback) nơ-ron và các ma trận $W_0, W_1, W_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tương ứng là ma trận liên kết trọng số, ma trận liên kết trọng số với trễ và ma trận liên kết trọng số với trễ phân phối; $B \in \mathbb{R}^{n\times m}, N \in \mathbb{R}^{s\times m}$ là các ma trận điều khiển đầu vào; $C \in \mathbb{R}^{n\times r}$ là ma trận không chắc chắn/nhiễu đầu vào; $E, M \in \mathbb{R}^{s\times n}$ là các ma trận quan sát đầu ra; $h(t), k(t)$ là các hàm trễ biến thiên theo thời gian thỏa mãn

$$0 \leqslant h_1 \leqslant h(t) \leqslant h_2, \quad 0 \leqslant k(t) \leqslant k,$$

ở đây h_1, h_2, k là các hằng số cho trước. Hàm điều kiện ban đầu $\varphi(t) \in C^1([-d,0], \mathbb{R}^n)$, ở đây $d = \max\{h_2, k\}$, và

$$f(x(t)) = [f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \ldots, f_n(x_n(t))]^\mathsf{T},$$

$$g(x(t-h(t))) = [g_1(x_1(t-h(t))), g_2(x_2(t-h(t))), \ldots, g_n(x_n(t-h(t)))]^{\mathsf{T}},$$
$$c(x(t)) = [c_1(x_1(t)), c_2(x_2(t)), \ldots, c_n(x_n(t))]^{\mathsf{T}},$$

là các hàm kích hoạt khác nhau sao cho với mỗi $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f_i(\cdot)$, $g_i(\cdot)$ và $c_i(\cdot)$ là các hàm một biến thực liên tục Lipschitz với các hằng số Lipschitz tương ứng là a_i, b_i và c_i. Hơn nữa, giả sử rằng $f_i(0) = g_i(0) = c_i(0) = 0 \ \forall i = \overline{1, n}$.

Nhận xét 2.1. (i) Từ các giả thiết trên suy được ngay với mỗi $i \in \{1, \ldots, n\}$, điều kiện tăng trưởng sau đúng:

$$|f_i(\xi)| \leqslant a_i|\xi|, \quad |g_i(\xi)| \leqslant b_i|\xi|, \quad |c_i(\xi)| \leqslant c_i|\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

(ii) Mô hình mạng nơ-ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên hỗn hợp (2.1) với các hàm kích hoạt khác nhau $f(x(t))$, $g(x(t-h(t)))$, $c(x(t))$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz như trên sẽ tồn tại duy nhất nghiệm trên khoảng $[0, +\infty)$ theo Định lý 1.3, Chương 1 của luận án.

Định nghĩa 2.1. Cho $\alpha > 0$. Nghiệm $x = 0$ của hệ (2.1) với $u \equiv 0$, $\omega \equiv 0$, được gọi là $\alpha-$ổn định mũ nếu tồn tại một hằng số $N \geqslant 1$ sao cho mọi nghiệm của hệ thỏa mãn

$$\|x(t, \varphi)\| \leqslant N\|\varphi\|_{C^1} e^{-\alpha t} \quad \forall t \geqslant 0.$$

Định nghĩa 2.2. Cho $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho hệ (2.1) tương ứng với α, γ được gọi là giải được nếu tồn tại một hàm điều khiển phản hồi $u(t) = Kx(t)$, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) Nghiệm $x = 0$ của hệ đóng:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = -[A - BK]x(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t))) \\ + W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds \\ x(t) = \varphi(t), \ t \in [-d, 0], \end{aligned}$$

là $\alpha-$ổn định mũ.

(ii) Tồn tại một số thực $c_0 > 0$ sao cho

$$\sup \frac{\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt}{c_0\|\varphi\|_{C^1}^2 + \int_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt} \leqslant \gamma, \tag{2.2}$$

ở đây supremum được lấy trên mọi hàm điều kiện ban đầu $\varphi(t) \in C^1([-d,0],\mathbb{R}^n)$ và mọi biến nhiễu $\omega(t) \in L^2([0,\infty),\mathbb{R}^r)$, $\omega \not\equiv 0$.

Trong trường hợp này, ta nói điều khiển phản hồi $u(t) = Kx(t)$ ổn định hóa dạng mũ hệ (2.1).

Nhận xét 2.2. Nhắc lại rằng hầu như mọi hệ thống thực (bao gồm hệ thống điều khiển nơ-ron) đều phải chịu tác động của các nhiễu loạn bên ngoài và trong một số trường hợp điều này có thể làm giảm hiệu suất của hệ thống nếu các hiệu ứng của chúng không được xem xét trong giai đoạn thiết kế. Nhiều phương pháp đã được đề xuất để đối phó với vấn đề này và một trong số đó là kỹ thuật điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ với giả định rằng nhiễu bên ngoài thuộc không gian $L^2[0,\infty)$. Như đã giới thiệu ở Mục 1.2, Chương 1, ý tưởng ở đây là thiết kế một điều khiển dưới tối ưu để giảm thiểu tác động của nhiễu bên ngoài lên đầu ra. Cụ thể là thiết kế một bộ điều khiển nhằm đảm bảo chuẩn $\mathcal{H}_\infty$ của hàm chuyển giữa đầu ra được kiểm soát $z(t)$ và nhiễu bên ngoài $\omega(t)$ không vượt quá một mức $\gamma > 0$ cho trước. Từ đó, ràng buộc giữa đầu vào và đầu ra

$$\|z\|_2 \leqslant \gamma\|\omega\|_2 \quad \forall \omega \in L^2([0,\infty),\mathbb{R}^q)$$

được thiết lập ở cuối Mục 1.2.2, Chương 1 trong bối cảnh hệ không có trễ và điều kiện ban đầu $x(0) = 0$. Ở đây, (2.2) được chúng tôi đề xuất như một mở rộng của ràng buộc trên thành

$$\|z\|_2^2 \leqslant \gamma(c_0\|\varphi\|_{C^1}^2 + \|\omega\|_2^2) \quad \forall \varphi(\cdot) \in C^1([-d,0],\mathbb{R}^n),\ \forall \omega(\cdot) \in L^2([0,\infty),\mathbb{R}^r),$$

với mục đích đánh giá biến lỗi đầu ra z phụ thuộc vào cả nhiễu ngoại sinh ω và điều kiện ban đầu φ của trạng thái x.

2.2. KẾT QUẢ CHÍNH

Trước khi phát biểu một điều kiện đủ cho sự tồn tại của điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho hệ (2.1), ta ký hiệu:

$$\begin{aligned}
&F = \mathrm{diag}\{a_1,\dots,a_n\},\ \ G = \mathrm{diag}\{b_1,\dots,b_n\},\ \ H = \mathrm{diag}\{c_1,\dots,c_n\},\\
&c^2 = \max\{c_1^2,\dots,c_n^2\},\\
&P_1 = P^{-1},\ \ Q_1 = P^{-1}QP^{-1},\ \ R_1 = P^{-1}RP^{-1},\ \ S_1 = P^{-1}SP^{-1},\\
&\alpha_1 = \lambda_{\min}(P_1),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= \lambda_{\max}(P_1) + h_1\lambda_{\max}(Q_1) + \frac{1}{2}h_2^3\lambda_{\max}(R_1) \\
&\quad + \frac{1}{2}(h_2 - h_1)^2(h_2 + h_1)\lambda_{\max}(S_1) + \frac{1}{2}c^2k^2\lambda_{\max}(D_2^{-1}), \\
\Omega_{11} &= -(AP + PA) + Q + 2\alpha P + \frac{2}{\gamma}CC^\mathsf{T} + 2ke^{2\alpha k}W_2D_2W_2^\mathsf{T} - \frac{3}{4}BB^\mathsf{T} \\
&\quad - e^{-2\alpha h_2}R + W_0D_0W_0^\mathsf{T} + W_1D_1W_1^\mathsf{T}, \\
\Omega_{12} &= -PA - \frac{1}{2}BB^\mathsf{T}, \\
\Omega_{22} &= -2P + h_2^2R + (h_2 - h_1)^2S + 2ke^{2\alpha k}W_2D_2W_2^\mathsf{T} + \frac{2}{\gamma}CC^\mathsf{T} \\
&\quad + W_0D_0W_0^\mathsf{T} + W_1D_1W_1^\mathsf{T}, \\
\Omega_{33} &= -e^{-2\alpha h_1}Q - e^{-2\alpha h_2}S, \;\; \Omega_{44} = -e^{-2\alpha h_2}R - e^{-2\alpha h_2}S.
\end{aligned}
$$

Như trong Petersen et al. (2000), ta cũng giả sử rằng các ma trận E, M, N của hệ (2.1) thỏa mãn

$$N^\mathsf{T}[E \;\; M] = 0, \quad N^\mathsf{T}N = I.$$

Định lý 2.1. *Cho $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Giả sử các ma trận hệ số của hệ (2.1) thỏa mãn điều kiện: tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương P, Q, R, S và ba ma trận đường chéo xác định dương D_0, D_1, D_2 sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau đúng:*

$$
\Omega = \begin{bmatrix}
\Omega_{11} & \Omega_{12} & 0 & e^{-2\alpha h_2}R & PE^\mathsf{T} & PF & PH & 0 & 0 \\
* & \Omega_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & \Omega_{33} & e^{-2\alpha h_2}S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & \Omega_{44} & 0 & 0 & 0 & PM^\mathsf{T} & PG \\
* & * & * & * & -\frac{1}{2}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\frac{1}{2}D_0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -\frac{1}{k}D_2 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}D_1
\end{bmatrix} < 0. \tag{2.3}
$$

Khi đó, bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ ứng với các hệ số α, γ cho hệ (2.1) là giải được với hàm điều khiển phản hồi ổn định hóa dạng mũ hệ thống

$$u(t) = -\frac{1}{2}B^\mathsf{T}P^{-1}x(t), \quad t \geqslant 0,$$

và nghiệm của hệ, khi nhiễu $\omega \equiv 0$, thỏa mãn

$$\|x(t,\varphi)\| \leqslant \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|\varphi\|_{C^1} e^{-\alpha t} \quad \forall t \geqslant 0.$$

Nhận xét 2.3. Trong các tài liệu He et al. (2007), Kwon và Park (2009), Sakthivel et al. (2012), các ẩn số bổ sung và các ma trận trọng số tự do được giới thiệu để tạo tính linh hoạt trong việc giải các LMI thu được. Tuy nhiên, quá nhiều ẩn số và ma trận trọng số tự do được sử dụng trong các phương pháp hiện có khiến việc phân tích hệ thống trở nên phức tạp và làm tăng đáng kể nhu cầu tính toán. Để tránh nhược điểm đó, trong Định lý 2.1 chúng tôi hoàn toàn không đưa vào bất cứ ma trận trọng số tự do nào.

Nhận xét 2.4. Kết quả mà chúng tôi đề xuất cũng đã khắc phục được mặt hạn chế trong các kết quả đã có (xem He et al. (2007), Phat và Trinh (2010), Phat và Trinh (2013), Sakthivel et al. (2012)) về tính khả vi của độ trễ; hơn nữa, trễ rời rạc $h(t)$ cũng đã được mở rộng thành công sang trường hợp nhận giá trị trong một khoảng, nghĩa là cận dưới của $h(t)$ có thể là một số thực dương. Ngoài ra, hàm điều khiển phản hồi ổn định hóa được thiết kế dựa trên việc tìm nghiệm của một bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Vì lý do đó, tiêu chuẩn của chúng tôi là sự mở rộng đáng kể của các tiêu chuẩn đã được đề xuất trong Phat và Trinh (2013), Sakthivel et al. (2012).

Nhận xét 2.5. Rõ ràng là các số hạng của ma trận khối Ω phụ thuộc đơn điệu theo độ trễ nên tính khả thi của LMI (2.3) sẽ càng tăng khi các đại lượng h_1, h_2, k càng bé. Đặc biệt, nếu (2.3) có nghiệm với độ trễ h_1, h_2, k dương nào đó thì nó cũng sẽ có nghiệm với mọi $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{k}$ bé hơn h_1, h_2, k theo thứ tự đó.

2.3. VÍ DỤ MINH HỌA

Trong mục này, chúng tôi cung cấp một ví dụ số để minh họa tính hiệu quả của các điều kiện đã thu được trong Định lý 2.1.

Chương 3
BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN $\mathcal{H}_\infty$ TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN CHO LỚP HỆ RỜI RẠC TUYẾN TÍNH CÓ TRỄ BIẾN THIÊN THEO THỜI GIAN DẠNG KHOẢNG

Chương này nhằm trình bày các điều kiện đủ giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng, đây cũng là kết quả thứ hai mà chúng tôi nhận được trong quá trình thực hiện đề tài. Nội dung của chương được trích từ bài báo [2] trong danh mục các công trình đã công bố của tác giả có liên quan đến luận án.

3.1. KHÁI NIỆM ỔN ĐỊNH TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN

Trong mục này, chúng tôi trình bày khái niệm ổn định trong thời gian hữu hạn và khẳng định về sự độc lập của nó với khái niệm ổn định Lyapunov.

3.2. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

Xét lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + A_d x(k-h(k)) + Bu(k) + G\omega(k), \\ z(k) &= Cx(k) + C_d x(k-h(k)), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(k) &= \varphi(k), \quad k \in \{-h_2, -h_2+1, \ldots, 0\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

ở đây $x(k) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $u(k) \in \mathbb{R}^m$ là biến điều khiển đầu vào; $z(k) \in \mathbb{R}^p$ là hàm quan sát đầu ra; $A, A_d \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, G \in \mathbb{R}^{n\times q}, C, C_d \in \mathbb{R}^{p\times n}$ là các ma trận hằng thực cho trước; $h(k)$ là hàm trễ thỏa mãn điều kiện

$$0 < h_1 \leqslant h(k) \leqslant h_2 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+,$$

ở đây h_1, h_2 là các số nguyên dương cho trước; $\varphi(k)$ là hàm điều kiện ban đầu; $\omega(k) \in \mathbb{R}^q$ là biến nhiễu thỏa mãn điều kiện

$$\sum_{k=0}^{N} \omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k) < d, \tag{3.2}$$

với d là một số thực dương cho trước.

Định nghĩa 3.1. Cho trước các số dương $N, c_1, c_2, c_1 < c_2$ và một ma trận xác định dương đối xứng R, hệ (3.1) với $u(k) = 0$ được gọi là bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với (c_1, c_2, R, N) nếu

$$\max_{k\in\{-h_2,-h_2+1,\ldots,0\}} \varphi^{\mathsf{T}}(k)R\varphi(k) \leqslant c_1 \implies x^{\mathsf{T}}(k)Rx(k) < c_2 \ \ \forall k = \overline{1, N},$$

với mọi nhiễu $\omega(k)$ thỏa (3.2).

Định nghĩa 3.2. Cho trước các số dương $\gamma, N, c_1, c_2, c_1 < c_2$ và một ma trận xác định dương đối xứng R, hệ (3.1) với $u(k) = 0$ được gọi là $\mathcal{H}_\infty$−bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với (c_1, c_2, R, N) nếu hai điều kiện sau đúng:

(i) Hệ (3.1) với $u(k) = 0$ là bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với (c_1, c_2, R, N).

(ii) Dưới điều kiện đầu bằng không (nghĩa là $\varphi(k) = 0\ \forall k \in \{-h_2, -h_2 + 1, \ldots, 0\}$), đầu ra $z(k)$ thỏa mãn

$$\sum_{k=0}^{N} z^{\mathsf{T}}(k)z(k) \leqslant \gamma \sum_{k=0}^{N} \omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k), \tag{3.3}$$

với mọi nhiễu $\omega(k)$ thỏa (3.2).

Định nghĩa 3.3. Cho trước các số dương $\gamma, N, c_1, c_2, c_1 < c_2$ và một ma trận xác định dương đối xứng R. Bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ (3.1) được gọi là giải được nếu tồn tại một hàm điều khiển phản hồi $u(k) = Kx(k)$ sao cho hệ đóng thu được là $\mathcal{H}_\infty$−bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với (c_1, c_2, R, N).

3.3. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Định lý 3.1. *Cho trước các số dương γ, N, c_1, c_2 với $c_1 < c_2$ và một ma trận xác định dương đối xứng R. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (3.1) thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại các ma trận xác định dương đối xứng P, Q, các vô hướng dương $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ và một số thực $\delta \geqslant 1$ sao cho các bất đẳng thức sau đúng:*

$$\lambda_1 R < P < \lambda_2 R, \quad Q < \lambda_3 R, \tag{3.4}$$

$$\begin{bmatrix} -\delta P + (h_2 - h_1 + 1)Q & 0 & 0 & A^\top P & C^\top \\ * & -\delta^{h_1} Q & 0 & A_d^\top P & C_d^\top \\ * & * & -\frac{\gamma}{\delta^N} I & G^\top P & 0 \\ * & * & * & -P & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{3.5}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma d - c_2 \delta \lambda_1 & c_1 \delta^{N+1} \lambda_2 & \rho \lambda_3 \\ * & -c_1 \delta^{N+1} \lambda_2 & 0 \\ * & * & -\rho \lambda_3 \end{bmatrix} < 0. \tag{3.6}$$

Khi đó hệ (3.1) với $u(k) = 0$ là $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với (c_1, c_2, R, N). Ở đây $\rho := c_1 \delta^{N+h_2-1} \big[h_2 \delta + \frac{h_2(h_2-1) - h_1(h_1-1)}{2} \big]$.

Định lý 3.2. *Cho trước các số dương γ, N, c_1, c_2 với $c_1 < c_2$ và một ma trận xác định dương đối xứng R. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (3.1) thỏa mãn điều kiện: tồn tại các ma trận xác định dương đối xứng U, V, W_1, W_2, W_3, một ma trận Y và một số thực $\delta \geqslant 1$ sao cho các bất đẳng thức sau đúng:*

$$U < W_2, \quad V < W_3, \tag{3.7}$$

$$\begin{bmatrix} -\delta U + (h_2 - h_1 + 1)V & 0 & 0 & UA^\top + Y^\top B^\top & UC^\top \\ * & -\delta^{h_1} V & 0 & UA_d^\top & UC_d^\top \\ * & * & -\frac{\gamma}{\delta^N} I & G^\top & 0 \\ * & * & * & -U & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{3.8}$$

$$\begin{bmatrix} -W_1 & c_1 \delta^{N+1} W_2 & \rho W_3 \\ * & -c_1 \delta^{N+1} W_2 & 0 \\ * & * & -\rho W_3 \end{bmatrix} < 0, \tag{3.9}$$

$$\begin{bmatrix} W_1 - c_2 \delta U & \gamma d U R \\ * & -\gamma d R \end{bmatrix} < 0. \tag{3.10}$$

Khi đó, bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ (3.1) là giải được. Hơn nữa, hàm điều khiển phản hồi được cho bởi

$$u(k) = YU^{-1} x(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Nhận xét 3.1. Như trong các công trình Zong et al. (2015) và Zuo et al. (2013), để chứng minh Định lý 3.1 (và sau đó là Định lý 3.2), chúng tôi đã tìm cách xây dựng một bộ các phiếm hàm kiểu Lyapunov–Krasovskii mới

trong đó có sự tham gia của các hệ số δ^{k-1-s} và δ^{k-1-t}. Bằng cách đó, chúng tôi đã tránh được việc phải biến đổi hệ gốc thành hai hệ con liên kết như các tác giả đã tiến hành trong Zhang et al. (2014) mà các điều kiện thu được (3.4)-(3.6) của Định lý 3.1 và (3.7)-(3.10) của Định lý 3.2 vẫn có dạng bất đẳng thức ma trận như trong Zhang et al. (2014). Ở đây, tham số δ đóng vai trò như một tham số hiệu chỉnh và (3.5)-(3.6), (3.8)-(3.10) sẽ trở thành các LMI khi ta cố định tham số δ này lại, do đó chúng có thể được lập trình và tính toán một cách dễ dàng bằng hộp công cụ LMI trong MATLAB. Đây cũng là một ưu điểm đáng ghi nhận của hai định lý này của chúng tôi khi so sánh với: các điều kiện (29), (39) trong Song et al. (2012), các điều kiện (45), (56) trong Zong et al. (2015) và điều kiện (5) trong Zuo et al. (2013).

Nhận xét 3.2. Trong các bài báo: He et al. (2008), Liu et al. (2011), Song et al. (2012) và Xiang and Xiao (2011), các ẩn số bổ sung và các ma trận trọng số tự do được đưa vào để tạo tính linh hoạt trong việc giải các LMI thu được. Tuy nhiên, quá nhiều ẩn số và ma trận trọng số tự do được sử dụng trong các phương pháp hiện có khiến cho việc phân tích hệ thống trở nên phức tạp và làm tăng đáng kể nhu cầu tính toán. So với phương pháp ma trận tự do được các tác giả trên sử dụng, phương pháp của chúng tôi sử dụng ít biến hơn, chẳng hạn, LMI (3.5) không có ma trận tự do nào, LMI (3.8) chỉ có một ma trận trọng số tự do. Vì thế, các điều kiện mà chúng tôi đề xuất ít bảo thủ hơn so với các công trình nêu trên.

3.4. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Trong mục này, chúng tôi cung cấp ba ví dụ số để minh họa tính hiệu quả của các điều kiện đã thu được trong Định lý 3.1 và Định lý 3.2, tương ứng.

Chương 4
BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN $\mathcal{H}_\infty$ TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN CHO LỚP HỆ NƠ-RON RỜI RẠC SUY BIẾN CÓ TRỄ BIẾN THIÊN THEO THỜI GIAN DẠNG KHOẢNG

Kết quả thứ ba của luận án sẽ được trình bày trong chương này. Cụ thể, chúng tôi sẽ đề cập đến các điều kiện đủ giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron rời rạc suy biến có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng. Nội dung của chương được trích từ bài báo [3] trong danh mục các công trình khoa học đã công bố của tác giả có liên quan đến luận án.

4.1. SƠ LƯỢC VỀ HỆ RỜI RẠC SUY BIẾN TUYẾN TÍNH

Trong mục này chúng tôi trình bày sơ lược về tính chính quy và nhân quả của hệ rời rạc suy biến tuyến tính với trễ hằng:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= A_0x(k) + A_1x(k-\tau) + Bu(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(k) &= \varphi(k), \quad k \in \{-\tau, -\tau+1, \ldots, 0\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Một kết quả đáng chú ý ở đây là với hàm giá trị ban đầu $\varphi(k)$ tương thích bất kỳ, từ tính chính quy và nhân quả của hệ tuyến tính (4.1) ta khẳng định được hệ là tồn tại duy nhất nghiệm.

4.2. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

Xét lớp hệ nơ-ron rời rạc suy biến có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + Wf(x(k)) + W_1g(x(k-h(k))) + Bu(k) + C\omega(k), \\ z(k) &= A_1x(k) + Dx(k-h(k)) + B_1u(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(k) &= \varphi(k), \quad k \in \{-h_2, -h_2+1, \ldots, 0\}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

ở đây $x(k) = [x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k)]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái của hệ nơ-ron; n là số nơ-ron; $u(k) \in \mathbb{R}^m$ là biến điều khiển đầu vào; $z(k) \in \mathbb{R}^p$ là hàm quan sát đầu ra của hệ nơ-ron;

$$\begin{aligned} f(x(k)) &= [f_1(x_1(k)), f_2(x_2(k)), \ldots, f_n(x_n(k))]^\mathsf{T}, \\ g(x(k-h(k))) &= [g_1(x_1(k-h(k))), g_2(x_2(k-h(k))), \ldots, g_n(x_n(k-h(k)))]^\mathsf{T} \end{aligned}$$

là các hàm kích hoạt khác nhau, ở đây f_i, g_i, $i = \overline{1,n}$, là các hàm khả vi liên tục trong lân cận của gốc và thỏa mãn điều kiện tăng trưởng: với mỗi $i \in \{1, \ldots, n\}$, tồn tại các hằng số dương a_i, b_i sao cho:

$$|f_i(\xi)| \leqslant a_i|\xi|, \quad |g_i(\xi)| \leqslant b_i|\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

$E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận suy biến với $\operatorname{rank}(E) = r \leqslant n$. Ma trận đường chéo $A = \operatorname{diag}\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$, $|\overline{a}_i| < 1$ $\forall i = \overline{1,n}$ biểu thị sự tự hoàn ngược nơ-ron; các ma trận W, $W_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tương ứng là ma trận liên kết trọng số và ma trận liên kết trọng số với trễ; $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{p\times m}$ là các ma trận điều khiển đầu vào; $C \in \mathbb{R}^{n\times q}$ là ma trận nhiễu đầu vào; A_1, $D \in \mathbb{R}^{p\times n}$ là các ma trận quan sát đầu ra; $h(k)$ là hàm trễ biến thiên theo thời gian thỏa mãn điều kiện

$$0 < h_1 \leqslant h(k) \leqslant h_2 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+,$$

ở đây h_1, h_2 là các số nguyên dương cho trước; $\varphi(k)$ là hàm điều kiện ban đầu; $\omega(k) \in \mathbb{R}^q$ là biến nhiễu thỏa mãn điều kiện

$$\sum_{k=0}^{N} \omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k) < d,$$

với d là một số thực dương cho trước.

Định nghĩa 4.1. Cặp ma trận (E, A) được gọi là chính quy nếu đa thức đặc trưng $\det(sE - A)$, ở đây $s \in \mathbb{C}$, không đồng nhất không. Cặp ma trận (E, A) được gọi là nhân quả nếu $\deg(\det(sE - A)) = \operatorname{rank}(E) = r$. Hệ (4.2) với $u(k) = 0$ được gọi là chính quy và nhân quả nếu cặp ma trận (E, A) là chính quy và nhân quả.

Nhận xét 4.1. Nếu cặp (E, A) là chính quy và nhân quả, thì một hệ suy biến có thể được phân rã thành hai phần, cụ thể là một hệ con động lực và một (phương trình) ràng buộc đại số (xem Dai (1989), Sau (2018)). Nếu một điều kiện ban đầu thỏa mãn ràng buộc đại số, thì điều kiện ban đầu đó được gọi là điều kiện ban đầu tương thích. Trái ngược với kết quả đã phát biểu ở mục trước cho hệ suy biến tuyến tính, Ví dụ 1 trong Lu et al. (2011) cho thấy rằng ngay cả khi cặp ma trận (E, A) là chính quy và nhân quả, nghiệm của một hệ suy biến phi tuyến có thể không tồn tại với điều kiện ban đầu tương thích $x(0)$ nào đó. Tóm lại, sự tồn tại nghiệm là một vấn đề cơ bản đối với các hệ suy biến phi tuyến nói chung và các hệ nơ-ron suy

biến nói riêng, và hoàn toàn độc lập với tính chính quy và tính nhân quả. Vì lý do đó, bất cứ khi nào chúng ta tiến hành nghiên cứu các lớp hệ này, sự tồn tại duy nhất nghiệm, tính chính quy và nhân quả nên được xem xét một cách đồng thời.

Nhận xét 4.2. Các khái niệm *bị chặn trong thời gian hữu hạn* và $\mathcal{H}_\infty-$*bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với bộ* (c_1, c_2, R, N) *cho trước của hệ (4.2) với* $u(k) = 0$ được định nghĩa hoàn toàn tương tự như đã phát biểu cho hệ (3.1) với $u(k) = 0$ (xem Định nghĩa 3.1 và Định nghĩa 3.2). *Bài toán điều khiển* $\mathcal{H}_\infty$ *trong thời gian hữu hạn cho hệ (4.2)* cũng được định nghĩa hoàn toàn tương tự như đã tiến hành cho hệ (3.1) (xem Định nghĩa 3.3).

4.3. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Xét hệ nơ-ron rời rạc suy biến (4.2) với $u(k) = 0$, vì $\operatorname{rank}(E) = r \leqslant n$ nên tồn tại hai ma trận không suy biến M, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho $MEG = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ta ký hiệu

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} M, \quad MAG = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$
$$M^{-\mathsf{T}} P M^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad F = \operatorname{diag}\{a_1, \ldots, a_n\}, \quad H = \operatorname{diag}\{b_1, \ldots, b_n\},$$
$$\Phi_{11} = -\delta E^{\mathsf{T}} P E + (h_2 - h_1 + 1)Q + S_1 + A_1^{\mathsf{T}} A_1 + F^2 - P\bar{M}A - A\bar{M}^{\mathsf{T}} P,$$
$$\Phi_{22} = \delta^{h_1}(-S_1 + S_2), \quad \Phi_{44} = -\delta^{h_1} Q + D^{\mathsf{T}} D + H^2.$$

Từ đó, tính chính quy, tính nhân quả và sự tồn tại duy nhất nghiệm của hệ (4.2) được đảm bảo bởi định lý sau.

Định lý 4.1. *Cho trước các số dương* γ, N. *Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (4.2) thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại các ma trận xác định dương đối xứng* P, Q, S_1, S_2 *và một số thực* $\delta \geqslant 1$ *sao cho bất đẳng thức ma trận sau đúng:*

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 & 0 & A_1^\top D & -P\bar{M}W & -P\bar{M}W_1 & -P\bar{M}C & AP \\ * & \Phi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\delta^{h_2}S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 & W^\top P \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & W_1^\top P \\ * & * & * & * & * & * & -\frac{\gamma}{\delta^N}I & C^\top P \\ * & * & * & * & * & * & * & -P \end{bmatrix} < 0. \tag{4.3}$$

Khi đó hệ (4.2) với $u(k) = 0$ là chính quy, nhân quả và có nghiệm duy nhất trong một lân cận của gốc.

Nhận xét 4.3. Trong Lu et al. (2011) (tương ứng, trong Song et al. (2012)), các tác giả đã đề nghị một điều kiện đủ cho sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm của các hệ rời rạc suy biến với nhiễu phi tuyến bằng cách sử dụng nguyên lý điểm bất động (tương ứng, định lý hàm ẩn). Trong Định lý 4.1, bằng cách vận dụng định lý hàm ẩn như trong Song et al. (2012), chúng tôi thu được một điều kiện đủ cho không chỉ sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm, mà còn tính chính quy và nhân quả của hệ (4.2). Do điều kiện thu được có dạng bất đẳng thức ma trận nên có thể được giải một cách hiệu quả bằng cách sử dụng hộp công cụ LMI trong Matlab (xem Gahinet et al. (1995)).

Tiếp theo chúng tôi phát biểu một điều kiện đủ đảm bảo rằng hệ (4.2) với $u(k) = 0$ là $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với (c_1, c_2, R, N).

Định lý 4.2. *Cho trước các số dương γ, N, c_1, c_2 với $c_1 < c_2$ và một ma trận xác định dương đối xứng R. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (4.2) thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại các ma trận xác định dương đối xứng P, Q, S_1, S_2, các vô hướng dương λ_i, $i = \overline{1,5}$ và số thực $\delta \geqslant 1$ sao cho các bất đẳng thức ma trận sau đúng:*

$$\Psi = \Big[\Psi_{ij}\Big]_{11\times 11} < 0, \tag{4.4}$$

$$E^\top PE < \lambda_1 R, \quad Q < \lambda_2 R, \quad \lambda_3 R < S_1 < \lambda_4 R, \quad S_2 < \lambda_5 R, \tag{4.5}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma d - c_2\lambda_3 & c_1\delta^{N+1}\lambda_1 & \rho\lambda_2 & c_1\delta^{N+h_1}h_1\lambda_4 & c_1\delta^{N+h_2}(h_2-h_1)\lambda_5 \\ * & -c_1\delta^{N+1}\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\rho\lambda_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -c_1\delta^{N+h_1}h_1\lambda_4 & 0 \\ * & * & * & * & -c_1\delta^{N+h_2}(h_2-h_1)\lambda_5 \end{bmatrix} < 0. \tag{4.6}$$

Khi đó hệ (4.2) với $u(k) = 0$ là $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với (c_1, c_2, R, N). Ở đây

$$\begin{aligned}
&\Psi_{11} = -\delta E^\mathsf{T} PE + (h_2 - h_1 + 1)Q + S_1 - P\bar{M}A - A\bar{M}^\mathsf{T} P,\\
&\Psi_{15} = -P\bar{M}W,\ \ \Psi_{16} = -P\bar{M}W_1,\ \ \Psi_{17} = -P\bar{M}C,\ \ \Psi_{18} = AP,\\
&\Psi_{19} = A_1^\mathsf{T},\ \ \Psi_{1,10} = F,\ \ \Psi_{22} = \Phi_{22},\ \ \Psi_{33} = -\delta^{h_2}S_2,\ \ \Psi_{44} = -\delta^{h_1}Q,\\
&\Psi_{49} = D^\mathsf{T},\ \ \Psi_{4,11} = H,\ \ \Psi_{55} = \Psi_{66} = \Psi_{99} = \Psi_{10,10} = \Psi_{11,11} = -I,\\
&\Psi_{58} = W^\mathsf{T}P,\ \ \Psi_{68} = W_1^\mathsf{T}P,\ \ \Psi_{77} = -\frac{\gamma}{\delta^N}I,\ \ \Psi_{78} = C^\mathsf{T}P,\ \ \Psi_{88} = -P,\\
&\Psi_{ij} = 0 \ \ \textit{với mọi } i, j \textit{ khác: } j > i,\ \ \Psi_{ij} = \Psi_{ji}^\mathsf{T}\ \ \forall i, j:\ i > j,\\
&\quad \rho = c_1\tfrac{h_2(h_2+1)-h_1(h_1-1)}{2}\delta^{N+h_2}.
\end{aligned}$$

Định lý 4.3. *Cho trước các số dương γ, N, c_1, c_2 với $c_1 < c_2$ và một ma trận xác định dương đối xứng R. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (4.2) thỏa mãn điều kiện: tồn tại các ma trận xác định dương đối xứng U_i, V_j với $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,5}$, một ma trận Y và một số thực $\delta \geqslant 1$ sao cho các bất đẳng thức ma trận sau đúng:*

$$\Omega = \left[\Omega_{ij}\right]_{11\times 11} < 0, \tag{4.7}$$

$$\begin{bmatrix} -V_1 & U_1E^\mathsf{T} \\ * & -U_1 \end{bmatrix} < 0, \tag{4.8}$$

$$U_2 < V_2, \quad U_3 < V_4, \quad U_4 < V_5, \tag{4.9}$$

$$\begin{bmatrix} -V_3 & c_1\delta^{N+1}V_1 & \rho V_2 & c_1\delta^{N+h_1}h_1V_4 & c_1\delta^{N+h_2}(h_2-h_1)V_5 \\ * & -c_1\delta^{N+1}V_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\rho V_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -c_1\delta^{N+h_1}h_1V_4 & 0 \\ * & * & * & * & -c_1\delta^{N+h_2}(h_2-h_1)V_5 \end{bmatrix} < 0, \tag{4.10}$$

$$\begin{bmatrix} V_3 - c_2U_3 & \gamma dU_1R \\ * & -\gamma dR \end{bmatrix} < 0. \tag{4.11}$$

Khi đó, bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ (4.2) là giải được. Hơn nữa, hàm điều khiển phản hồi được xác định bởi

$$u(k) = YU_1^{-1}x(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

ở đây

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} &= \delta U_1 + (h_2 - h_1 + 1)U_2 + U_3 + \delta(U_1E^\mathsf{T} + EU_1) - \bar{M}(AU_1 + BY) \\
&\quad - (U_1A + Y^\mathsf{T}B^\mathsf{T})\bar{M}^\mathsf{T}, \\
\Omega_{15} &= -\bar{M}W, \;\; \Omega_{16} = -\bar{M}W_1, \;\; \Omega_{17} = -\bar{M}C, \;\; \Omega_{18} = U_1A + Y^\mathsf{T}B^\mathsf{T}, \\
\Omega_{19} &= U_1A_1^\mathsf{T} + Y^\mathsf{T}B_1^\mathsf{T}, \;\; \Omega_{1,10} = U_1F, \;\; \Omega_{22} = \delta^{h_1}(-U_3 + U_4), \\
\Omega_{33} &= -\delta^{h_2}U_4, \;\; \Omega_{44} = -\delta^{h_1}U_2, \;\; \Omega_{49} = U_1D^\mathsf{T}, \;\; \Omega_{4,11} = U_1H, \\
\Omega_{55} &= \Omega_{66} = \Omega_{99} = \Omega_{10,10} = \Omega_{11,11} = -I, \;\; \Omega_{58} = W^\mathsf{T}, \;\; \Omega_{68} = W_1^\mathsf{T}, \\
\Omega_{77} &= -\frac{\gamma}{\delta^N}I, \;\; \Omega_{78} = C^\mathsf{T}, \;\; \Omega_{88} = -U_1, \;\; \Omega_{ij} = 0 \;\; \textit{với mọi } i, j \textit{ khác: } j > i, \\
\Omega_{ij} &= \Omega_{ji}^\mathsf{T} \;\; \forall i, j : \; i > j, \;\; \rho = c_1\tfrac{h_2(h_2+1) - h_1(h_1-1)}{2}\delta^{N+h_2}.
\end{aligned}$$

Nhận xét 4.4. Các kết quả mà chúng tôi nhận được trong Định lý 4.2 và Định lý 4.3 có thể được coi là sự mở rộng của các kết quả trong Lu et al. (2009) và Ma and Zheng (2018) sang trường hợp điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho hệ nơ-ron rời rạc suy biến (4.2). Theo sự hiểu biết của chúng tôi, đây là lần đầu tiên bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ nơ-ron rời rạc suy biến với trễ biến thiên theo thời gian được đề cập. Tuy vậy, lưu ý rằng không giống với phần lớn các công trình thuộc dạng "lần đầu tiên" khác, các tiêu chuẩn của chúng tôi đều phụ thuộc vào độ trễ, cụ thể hơn là phụ thuộc vào cả cận trên và cận dưới của độ trễ.

Nhận xét 4.5. Trong các Định lý 4.1 - 4.3, δ vẫn giữ vai trò như một tham số hiệu chỉnh và (4.3), (4.4), (4.6), (4.7) & (4.10) sẽ trở thành các LMI khi ta cố định tham số δ này lại; vì thế, chúng có thể được xử lý một cách dễ dàng bằng hộp công cụ LMI trong MATLAB. Đây cũng là một ưu điểm đáng ghi nhận của các định lý này của chúng tôi khi so sánh với: điều kiện (31) trong Ma et al. (2015), các điều kiện (31), (40) & (49) trong Ma et al. (2016) và điều kiện (22b) trong Zhang et al. (2014).

4.4. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Trong mục này, chúng tôi cung cấp hai ví dụ số để minh họa tính hiệu quả của các điều kiện đã thu được trong các Định lý 4.2 và Định lý 4.3.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho một số lớp hệ phương trình vi/sai phân có trễ biến thiên theo thời gian và nhận giá trị trong một khoảng. Các kết quả chính đạt được là:

• Thiết kế được một hàm điều khiển phản hồi giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho lớp hệ nơ-ron có trễ biến thiên hỗn hợp.

• Đề xuất được các điều kiện đủ đảm bảo tính $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng. Từ đó thiết kế một hàm điều khiển phản hồi giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ này.

• Thiết lập được các kết quả tương ứng cho lớp hệ nơ-ron rời rạc suy biến có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng. Hơn nữa, với lớp hệ này, chúng tôi còn đồng thời chứng minh được tính chính quy, tính nhân quả và sự tồn tại duy nhất nghiệm của hệ trong lân cận của gốc.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở có thể được tiếp tục nghiên cứu như:

• Nghiên cứu tính ổn định và bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ (trong thời gian hữu hạn) cho các lớp hệ phương trình vi/sai phân và điều khiển khác như: hệ phi tuyến, hệ chuyển mạch, hệ với bước nhảy Markov, v.v. có trễ biến thiên theo thời gian và nhận giá trị trong một khoảng.

• Nghiên cứu tính ổn định (trong thời gian hữu hạn) và thiết kế các điều khiển có dạng khác, chẳng hạn như điều khiển phụ thuộc hàm quan sát, cho các lớp hệ phương trình vi/sai phân và điều khiển có trễ biến thiên theo thời gian và nhận giá trị trong một khoảng.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] Le A. Tuan, Phan T. Nam and Vu N. Phat (2013), New $\mathcal{H}_\infty$ controller design for neural networks with interval time-varying delays in state and observation, *Neural Processing Letters*, Volume 37, Issue 3, 235-249. (SCIE)

[2] Le A. Tuan and Vu N. Phat (2016), Finite-time stability and $\mathcal{H}_\infty$ control of linear discrete-time delay systems with norm-bounded disturbances, *Acta Mathematica Vietnamica*, Volume 41, Number 3, 481-493. (SCOPUS)

[3] Le A. Tuan and Vu N. Phat (2018), Existence of solutions and finite-time stability for nonlinear singular discrete-time neural networks, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, Published Online: 13 February 2018, DOI: https://doi.org/10.1007/s40840-018-0608-y. (SCIE)

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại:

- Đại hội Toán học toàn quốc lần thứ VIII, Nha Trang, 08/2013.
- Hội thảo Tối ưu và Tính toán Khoa học lần thứ XIII, Ba Vì, 23-25/04/2015.
- Xê-mi-na của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.
- Xê-mi-na của Phòng Tối ưu và Điều khiển, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.