BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

LÊ ANH TUẤN

BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN $\mathcal{H}_\infty$ CHO MỘT SỐ LỚP HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ TRỄ

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2018

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

LÊ ANH TUẤN

BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN $\mathcal{H}_\infty$ CHO MỘT SỐ LỚP HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ TRỄ

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 9 46 01 03

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát

Hà Nội - 2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả được phát biểu trong luận án là hoàn toàn trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất cứ một công trình nào khác.

Nghiên cứu sinh

Lê Anh Tuấn

LỜI CẢM ƠN

Luận án được thực hiện và hoàn thành dưới sự hướng dẫn nghiêm khắc, tận tình, chu đáo của GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát. Tôi xin bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy, người đã dìu dắt tôi bước vào nghiên cứu khoa học trong gần mười năm qua. Ngoài những chỉ dẫn về mặt khoa học, sự động viên và lòng tin tưởng mà Thầy dành cho tôi luôn là nguồn động lực lớn thúc đẩy tôi trong tiến trình nghiên cứu.

Tôi xin trân trọng gửi lời cảm ơn đến Ban Giám hiệu, Phòng Sau Đại học, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, đặc biệt là các thầy cô giáo trong Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã luôn giúp đỡ, động viên, tạo môi trường học tập nghiên cứu thuận lợi cho tôi trong suốt quãng thời gian làm nghiên cứu sinh.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến Ban Giám hiệu trường Đại học Khoa học Huế, các thầy cô và các anh chị em đồng nghiệp công tác tại Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học Huế đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để hỗ trợ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin được dành lời cảm ơn sau cùng cho đại gia đình của tôi, mọi người đã luôn yêu thương, chia sẻ, động viên tôi vượt qua mọi khó khăn, thử thách trong khoa học cũng như trong cuộc sống để hoàn thành luận án.

Mục lục

Lời cam đoan **1**

Lời cảm ơn **2**

Mục lục **3**

Danh mục các ký hiệu **5**

MỞ ĐẦU **7**

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI 7
2. TỔNG QUAN TÌNH HÌNH NGHIÊN CỨU 8
3. MỤC ĐÍCH, ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU 16
4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU 16
5. KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN 17
6. BỐ CỤC CỦA LUẬN ÁN 18

Chương 1. MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ **19**

1.1. BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH VÀ ỔN ĐỊNH HÓA HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ TRỄ 19

1.1.1. Bài toán ổn định 19

1.1.2. Bài toán ổn định hóa 26

1.2. BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN $\mathcal{H}_\infty$ 27

1.2.1. Không gian $\mathcal{H}_\infty$ 27

1.2.2. Bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ 29

1.3. BẤT ĐẲNG THỨC MA TRẬN TUYẾN TÍNH 31

Chương 2. BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN $\mathcal{H}_\infty$ CHO LỚP HỆ NƠ-RON CÓ TRỄ BIẾN THIÊN HỖN HỢP 34

2.1. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN 34

2.2. KẾT QUẢ CHÍNH 37

2.3. VÍ DỤ MINH HỌA 48

Chương 3. BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN $\mathcal{H}_\infty$ TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN CHO LỚP HỆ RỜI RẠC TUYẾN TÍNH CÓ TRỄ BIẾN THIÊN THEO THỜI GIAN DẠNG KHOẢNG 51

3.1. KHÁI NIỆM ỔN ĐỊNH TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN . . . 51

3.2. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN 53

3.3. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH 55

3.4. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA 65

Chương 4. BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN $\mathcal{H}_\infty$ TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN CHO LỚP HỆ NƠ-RON RỜI RẠC SUY BIẾN CÓ TRỄ BIẾN THIÊN THEO THỜI GIAN DẠNG KHOẢNG 70

4.1. SƠ LƯỢC VỀ HỆ RỜI RẠC SUY BIẾN TUYẾN TÍNH 70

4.2. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN 74

4.3. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH 77

4.4. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA 97

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ 101

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN 103

TÀI LIỆU THAM KHẢO 104

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$	tập các số thực và tập các số thực không âm tương ứng
$\mathbb{Z}_+$	tập các số nguyên không âm
$\mathbb{N}$	tập các số tự nhiên
$\mathbb{C}$	tập các số phức
$\mathrm{Re}(s)$	phần thực của số phức s
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide thực n chiều
$\mathbb{R}^{n\times r}$	không gian các ma trận thực có kích thước $(n \times r)$
$\langle x, y\rangle = x^\mathsf{T} y$	tích vô hướng của hai véc tơ x, y trên $\mathbb{R}^n$: $x^\mathsf{T} y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$
$\|x\|$	chuẩn Euclide của véc tơ $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2}$
I	ma trận vuông đơn vị với số chiều phù hợp
$*$	các phần tử dưới đường chéo chính của một ma trận đối xứng
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
A^{-1}	ma trận nghịch đảo của ma trận A
$A^{-\mathsf{T}}$	viết tắt của $(A^{-1})^\mathsf{T}$
$\lambda(A)$	tập hợp tất cả các giá trị riêng của ma trận A
$\lambda_{\max}(A)$	$:= \max\{\mathrm{Re}\lambda : \ \lambda \in \lambda(A)\}$
$\lambda_{\min}(A)$	$:= \min\{\mathrm{Re}\lambda : \ \lambda \in \lambda(A)\}$
$\sigma_{\max}(A)$	giá trị suy biến (singular value) lớn nhất của ma trận A
$A \geqslant 0$	A là ma trận nửa xác định dương, tức $x^\mathsf{T} A x \geqslant 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
$A > 0$	A là ma trận xác định dương, tức $x^\mathsf{T} A x > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$\mathrm{diag}\{A_1, \ldots, A_n\}$	ma trận đường chéo với A_i là phần tử thứ i trên đường chéo
$\mathcal{K}$	tập các hàm liên tục không giảm $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $u(0) = 0,\ u(s) > 0\ \ \forall s > 0$
$C([a,b], \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm liên tục trên $[a,b]$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$ với chuẩn $\|x\|_C = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \|x(t)\|$
$C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm khả vi liên tục trên $[a,b]$, nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$ với chuẩn $\|x\|_{C^1} = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \{\|x(t)\|, \|\dot{x}(t)\|\}$
$L^2([0,\infty), \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm $\omega : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bình phương khả tích trên $[0,\infty)$, nghĩa là $\int\limits_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt < \infty$
LMI	bất đẳng thức ma trận tuyến tính (viết tắt của cụm từ tiếng Anh "linear matrix inequality")
FTS	tính ổn định trong thời gian hữu hạn (viết tắt của cụm từ tiếng Anh "finite-time stability")
LS	tính ổn định Lyapunov (viết tắt của cụm từ tiếng Anh "Lyapunov stability")
RFDE	phương trình vi phân hàm có trễ (viết tắt của cụm từ tiếng Anh "retarded functional differential equation")

MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Lý thuyết ổn định là một nhánh quan trọng của lý thuyết định tính các hệ phương trình vi phân mà được nhà toán học người Nga A.M. Lyapunov khởi xướng từ những năm cuối thế kỷ XIX. Với bề dày lịch sử hơn một thế kỷ nhưng đến thời điểm này lý thuyết ổn định Lyapunov vẫn còn là một lĩnh vực nghiên cứu có sức lôi cuốn rất lớn của toán học với ngày càng nhiều ứng dụng quan trọng được tìm thấy trong cơ học, vật lý, hóa học, công nghệ thông tin, sinh thái, môi trường, v.v... và nó cũng trở thành một nhánh nghiên cứu không thể thiếu trong lý thuyết hệ thống và ứng dụng [18, 20, 24, 29, 30].

Cùng với tính ổn định nghiệm, người ta còn quan tâm tới việc thiết kế một bộ điều khiển sao cho khi nó tác động vào một hệ điều khiển, hệ trở nên ổn định. Bài toán này được gọi là bài toán ổn định hóa hệ điều khiển và người ta bắt đầu nghiên cứu tính ổn định hóa được của hệ điều khiển từ những năm 1960. Mặt khác, trong các mô hình toán học (được xây dựng từ các bài toán kỹ thuật trong thực tiễn) thường xuất hiện độ trễ thời gian. Các đại lượng trễ đó hình thành một cách tự nhiên, không thể tránh khỏi trong quá trình truyền tải, xử lý dữ liệu và người ta chỉ ra được rằng sự hiện diện của nó sẽ ít nhiều ảnh hưởng đến dáng điệu và tính chất của hệ, trong đó có tính ổn định, một tính chất thiết yếu trong các hệ kỹ thuật [18, 28, 43]. Chính vì vậy, việc nghiên cứu tính ổn định và điều khiển cho các hệ có trễ là bài toán có ý nghĩa thực tế, đã và đang được nhiều học giả quan tâm trong những năm gần đây [2, 8, 12, 14, 41, 57]. Các hướng nghiên cứu quan trọng bao gồm việc đánh giá

định tính sự phụ thuộc độ trễ của tính ổn định cũng như xây dựng các tiêu chuẩn mới, tân tiến hơn để có thể áp dụng cho nhiều mô hình tổng quát và phức tạp hơn, phù hợp với các mô hình kỹ thuật hiện đại.

Bên cạnh đó, các quá trình trong thực tiễn thường xảy ra một cách không chắc chắn (nghĩa là, có sự xuất hiện của các đại lượng "nhiễu" hệ thống). Các nhiễu này có thể xuất hiện do sai số vận hành, do ảnh hưởng lẫn nhau giữa các thành tố trong hệ thống hoặc giữa các hệ thống khác nhau. Vì vậy, việc đòi hỏi phải biết chính xác tất cả các tham số của hệ trong mô hình là điều không tưởng hoặc rất khó vận dụng trong thực tế. Do đó, việc đánh giá tối ưu mức ảnh hưởng của nhiễu đối với đầu ra của hệ thống (bài toán $\mathcal{H}_\infty$) là bài toán có tính thời sự, được nhiều nhà toán học và kỹ sư quan tâm nghiên cứu. Các cách tiếp cận khác nhau đã được phát triển và một số lượng lớn các kết quả quan trọng về điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho nhiều lớp hệ có trễ đã được công bố trong thời gian qua [4, 8, 13, 44, 51, 53, 57, 59, 64]. Tuy vậy còn nhiều vấn đề mở thú vị và quan trọng trong cả lý thuyết lẫn ứng dụng vẫn chưa được giải quyết, đặc biệt là các kết quả hiện có về bài toán $\mathcal{H}_\infty$ cho các lớp hệ điều khiển có trễ tổng quát còn khá khiêm tốn và cần được tiếp tục nghiên cứu sâu hơn. Đó chính là động lực để chúng tôi thực hiện đề tài này.

2. TỔNG QUAN TÌNH HÌNH NGHIÊN CỨU

Trong cách tiếp cận theo miền thời gian (time-domain approach), phương pháp Lyapunov trực tiếp là một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu bài toán ổn định và điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho các hệ có trễ như: hệ tuyến tính, hệ phi tuyến, hệ nơ-ron, hệ suy biến, v.v... Qua đó, các điều kiện giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho hệ ô-tô-nôm sẽ được thiết lập dưới dạng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính hoặc phương trình Riccati đại số; còn với hệ không ô-tô-nôm thì các điều kiện giải bài toán này sẽ được thiết lập thông qua các phương trình Riccati vi phân. Hệ nơ-ron có trễ vừa được đề cập đến ở trên là một lớp hệ phương trình

vi phân hàm đặc biệt, đã được nghiên cứu một cách rộng rãi trong hơn hai thập kỷ qua bởi những ứng dụng thành công của nó trong nhiều lĩnh vực như: bộ nhớ kết hợp (associative memory), nhận dạng và phân loại mẫu, xử lý tín hiệu, xử lý ảnh, giải các bài toán tối ưu, v.v... Mặc dù đã có một số công trình đề cập đến bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho các hệ nơ-ron có trễ [35, 40, 46, 47, 48] nhưng chủ đề này còn lâu mới đạt được sự trọn vẹn và điều này thúc đẩy sự quan tâm đáng kể của chúng tôi trong luận án này.

Vì lý do đó, lớp hệ đầu tiên được đề cập trong luận án về bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ là hệ nơ-ron có trễ biến thiên hỗn hợp (nghĩa là yếu tố trễ gồm hai loại: trễ dạng rời rạc và trễ dạng tích phân):

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t))) + W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + Bu(t) + C\omega(t) \\
z(t) &= Ex(t) + Mx(t-h(t)) + Nu(t), \quad t \geqslant 0, \\
x(t) &= \varphi(t),\ t \in [-d, 0], \quad d = \max\{h_2, k\},
\end{aligned} \tag{1}$$

ở đây $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái của hệ nơ-ron; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển; $\omega(t) \in \mathbb{R}^r$ là biến nhiễu/không chắc chắn; $z(t) \in \mathbb{R}^s$ là hàm quan sát đầu ra của hệ nơ-ron; $A = \mathrm{diag}\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$ là ma trận đường chéo chính dương; $W_0, W_1, W_2, B, C, E, M, N$ là các ma trận thực cho trước có số chiều thích hợp; $f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $c(\cdot)$ là các hàm kích hoạt của hệ; $h(t)$, $k(t)$ là các hàm trễ của hệ thỏa mãn điều kiện $0 \leqslant h_1 \leqslant h(t) \leqslant h_2$, $0 \leqslant k(t) \leqslant k$.

Năm 2009, bài toán ổn định mũ cho hệ nơ-ron

$$\dot{x}(t) = -(A+\Delta A(t))x(t) + (W_0+\Delta W_0(t))f(x(t)) + (W_1+\Delta W_1(t))f(x(t-h(t)))$$

với hàm trễ $h(t)$ biến thiên liên tục dạng khoảng và có đạo hàm bị chặn đã được xét bởi Kwon và Park trong [32]. Còn bài toán ổn định hóa được dạng mũ thì được các tác giả Phat, Trinh [45] đề xuất vào năm 2010 cho hệ nơ-ron

với trễ hỗn hợp

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t))) + W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds + Bu(t),$$

trong đó các hàm trễ $h(t)$, $k(t)$ được giả thiết thỏa mãn điều kiện: $0 \leqslant h(t) \leqslant h,\ \dot{h}(t) \leqslant \delta < 1,\ 0 \leqslant k(t) \leqslant k \quad \forall t \geqslant 0$. Không lâu sau đó, kết quả này được mở rộng sang trường hợp trễ rời rạc $h(t)$ là hàm liên tục, nhận giá trị trong một khoảng bởi hai tác giả Thuan, Phat trong [52]. Năm 2012, Sakthivel và các cộng sự [47] xét bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho hệ nơ-ron có trễ hỗn hợp (và không có trễ trong hàm quan sát)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = &-(A+\Delta A)x(t) + (W_0+\Delta W_0)f(x(t)) + (W_1+\Delta W_1)g(x(t-h(t))) \\ &+ (W_2+\Delta W_2)\int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds + u(t) + (C+\Delta C)\omega(t),\end{aligned}$$

$$z(t) = Ex(t),$$

với các hàm trễ $h(t)$, $k(t)$ thỏa mãn: $0 \leqslant h(t) \leqslant h,\ \dot{h}(t) \leqslant \delta,\ 0 \leqslant k(t) \leqslant k \quad \forall t \geqslant 0$. Trong công trình này, các tác giả đã thu được tính ổn định hóa được dạng tiệm cận và điều kiện $\mathcal{H}_\infty$. Sang năm 2013, các tác giả Phat, Trinh [46] tiếp tục nghiên cứu bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho hệ nơ-ron có trễ

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-\tau_1(t))) + Bu(t) + C\omega(t),\\ z(t) &= Ex(t) + Mh(x(t-\tau_2(t))) + Nu(t),\end{aligned}$$

với cả hai trường hợp được xét: các hàm trễ $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ là khả vi và có đạo hàm bị chặn trên bởi một số thực dương bé hơn 1 hoặc các hàm trễ là bị chặn nhưng không nhất thiết khả vi. Từ đó, các tác giả đã thu được tính ổn định hóa được dạng mũ và điều kiện $\mathcal{H}_\infty$ ứng với mỗi trường hợp.

Như vậy, các kết quả đã nêu ở trên về tính ổn định và điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ phần lớn đều bị hạn chế bởi giả thiết độ trễ là hàm khả vi và có đạo hàm bị chặn trên hoặc đơn giản chỉ là hàm bị chặn. Hiện nay việc nghiên cứu bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho lớp hệ phương trình (1) với độ trễ $h(t)$ liên tục, không đòi hỏi

tính khả vi và nhận giá trị trong một khoảng nêu trên vẫn chưa nhận được sự quan tâm thích đáng của các nhà nghiên cứu (lưu ý rằng hàm trễ lúc đó được phép biến thiên nhanh theo thời gian và cận dưới h_1 của nó không nhất thiết phải bằng 0). Trong bối cảnh đó, chúng tôi đề xuất bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho hệ (1). Trên thực tế, bài toán này là tương đối khó để giải. Lý do là bởi các khó khăn sẽ phát sinh khi chúng ta cố gắng rút ra các điều kiện nhằm ổn định hóa hệ khi không có nhiễu đồng thời đảm bảo hiệu suất của hệ khi có nhiễu, đặc biệt khi trễ thời gian biến thiên liên tục dạng khoảng, không đòi hỏi tính khả vi xuất hiện ở cả hàm trạng thái và hàm quan sát. Các phiếm hàm Lyapunov–Krasovskii hiện có trong các công trình liên quan [40, 46, 47] không thể sử dụng để giải quyết vấn đề đặt ra cho hệ (1) khi chúng hoặc là sẽ không thể xử lý được khía cạnh không khả vi của hàm trễ hoặc sẽ dẫn tới các bất đẳng thức ma trận rất phức tạp. Vì thế, chúng tôi tìm cách phát triển các kỹ thuật đã có trong [7, 25, 52] để xử lý bài toán này. Bằng cách xây dựng các phiếm hàm Lyapunov–Krasovskii mới, một điều kiện đủ giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho hệ (1) được thiết lập thông qua các LMI mà có thể giải được một cách đơn giản thông qua các thuật toán trong [16].

Suốt mấy thập kỷ qua, tính ổn định tiệm cận Lyapunov (xem xét dáng điệu động lực của hệ trong khoảng thời gian vô hạn) gần như thống trị trong lý thuyết ổn định hệ thống. Thường thì tính ổn định tiệm cận là đủ cho các ứng dụng thực tiễn, tuy nhiên trên thực tế, đôi khi người ta chỉ quan tâm đến dáng điệu của hệ trong một khoảng thời gian hữu hạn cố định cho trước nào đó. Lúc này, phương pháp Lyapunov truyền thống không còn dùng được nữa và nửa đầu thập niên 1950 là cột mốc đánh dấu sự ra đời của khái niệm *ổn định trong thời gian hữu hạn* (mà đôi khi ta sẽ gọi tắt là ổn định hữu hạn) [5, 26]. Ứng với tính ổn định trong thời gian hữu hạn ta có *bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn*. Với sự phát triển của máy tính kỹ thuật số, lý thuyết hệ thống với thời gian rời rạc đóng một vai trò quan trọng trong lý

thuyết điều khiển. Trong các hệ thống thực, hệ thống với thời gian rời rạc thường xuất hiện như là kết quả của việc lấy mẫu hệ thống với thời gian liên tục; hoặc khi chỉ dữ liệu rời rạc là sẵn có để dùng; hoặc khi máy tính tham gia vào vòng điều khiển. Các hệ thống với thời gian rời rạc tồn tại rất nhiều trong các hệ thống xã hội, phân tích chuỗi thời gian, v.v. Hiện nay số lượng công bố có liên quan đến tính ổn định và điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho các lớp hệ rời rạc có trễ còn khá ít ỏi và các kết quả thu được thường chỉ hạn chế cho các lớp hệ không có trễ và hệ có trễ hằng; trường hợp trễ biến thiên vẫn chưa nhận được sự quan tâm một cách thích đáng và cần được tiếp tục nghiên cứu sâu hơn. Xuất phát từ thực tế đó, bài toán thứ hai được chúng tôi quan tâm trong luận án này là bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên dạng khoảng:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + A_d x(k-d(k)) + Bu(k) + G\omega(k), \\ z(k) &= Cx(k) + C_d x(k-d(k)), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(k) &= \varphi(k), \quad k \in \{-d_2, -d_2+1, \ldots, 0\}, \end{aligned} \tag{2}$$

ở đây hàm trễ $d(k)$ thỏa mãn điều kiện $0 < d_1 \leqslant d(k) \leqslant d_2 \ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$. Năm 2010, bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ rời rạc tuyến tính không có trễ

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + G\omega(k), \\ z(k) &= Cx(k) + D_1 u(k) + D_2 \omega(k), \end{aligned}$$

được đề xuất bởi Wang và các cộng sự trong [56]. Cũng bài toán này cho hệ rời rạc phi tuyến chuyển mạch không có trễ được Xiang và Xiao [58] nghiên cứu vào năm 2011. Đến năm 2012, Song và các cộng sự [50] đã tiến thêm được một bước khi giải quyết được bài toán này cho hệ rời rạc tuyến tính chuyển

mạch với trễ hằng

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + A_{d,\sigma(k)}x(k-d) + B_{\sigma(k)}u(k) + G_{\sigma(k)}\omega(k),$$
$$z(k) = C_{\sigma(k)}x(k) + C_{d,\sigma(k)}x(k-d) + D_{\sigma(k)}u(k) + F_{\sigma(k)}\omega(k).$$

Không lâu sau đó, kết quả này được mở rộng cho hệ rời rạc phi tuyến chuyển mạch có trễ hằng trong [65]. Về tính ổn định và ổn định hóa trong thời gian hữu hạn cho hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên dạng khoảng

$$x(k+1) = Ax(k) + A_d x(k-d(k)) + Bu(k),$$

có hai công trình khá tiêu biểu là [66] và [63] mà được các tác giả công bố tương ứng trong các năm 2013 và 2014.

Rõ ràng rằng các kết quả đã nêu ở trên về điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho các lớp hệ rời rạc tuyến tính cũng như phi tuyến đều bị hạn chế bởi giả thiết không có sự hiện diện của độ trễ hoặc có sự hiện diện của độ trễ nhưng chỉ đơn giản là hàm hằng. Hiện nay việc nghiên cứu bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phương trình (2) với độ trễ $d(k)$ thỏa điều kiện biến thiên dạng khoảng nêu trên vẫn chưa nhận được sự quan tâm của các nhà nghiên cứu. Trong bối cảnh đó, chúng tôi đề xuất bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ (2). Các phiếm hàm Lyapunov–Krasovskii hiện có trong các công trình liên quan [50, 56, 58, 65] không thể sử dụng để giải quyết vấn đề đặt ra cho hệ (2) bởi về nguyên tắc, chúng không thể xử lý được khía cạnh biến thiên theo thời gian của hàm trễ. Thay vào đó, dựa trên các kỹ thuật đã có trong [57, 63, 65, 66], chúng tôi đã xử lý được bài toán này bằng cách xây dựng một lớp phiếm hàm Lyapunov–Krasovskii mới.

Bài toán thứ ba được nhắm đến trong khuôn khổ của luận án này là bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron rời rạc suy biến

có trễ:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + Wf(x(k)) + W_1 g(x(k-d(k))) + Bu(k) + C\omega(k), \\ z(k) &= A_1 x(k) + Dx(k-d(k)) + B_1 u(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(k) &= \varphi(k), \quad k \in \{-d_2, -d_2+1, \ldots, 0\}, \end{aligned} \tag{3}$$

ở đây trễ thời gian $d(k)$ được giả thiết biến thiên dạng khoảng như trong hệ (2). Việc nghiên cứu bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho hệ nơ-ron rời rạc có trễ biến thiên dạng khoảng đã xuất hiện từ khá sớm với hai bài báo [35] và [48]. Tuy nhiên, tính ổn định trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ này chỉ mới được vài nhà nghiên cứu quan tâm gần đây. Cụ thể là, tính bị chặn trong thời gian hữu hạn cho hệ nơ-ron rời rạc với trễ biến thiên được Zhang và các cộng sự khảo sát trong [62] vào năm 2014, còn tính ổn định trong thời gian hữu hạn cho hệ nơ-ron mờ rời rạc không có trễ được Bai và các cộng sự thu được vào năm 2015 trong [6].

Trong thời gian gần đây, các hệ động lực được mô tả bởi các lớp hệ phương trình vi/sai phân suy biến có trễ đã giành được sự chú ý đặc biệt từ các nhà nghiên cứu, lý do là bởi với các lớp hệ phương trình vi/sai phân suy biến, ta có thể mô hình hóa các bài toán xuất phát từ thực tiễn tốt hơn so với các lớp hệ phương trình vi/sai phân thường và lý thuyết hệ suy biến hiện đang tìm thấy nhiều ứng dụng phong phú trong các lĩnh vực rất khác nhau như cơ học, vật lý, sinh học, kỹ thuật, kinh tế, v.v... [3, 9, 10, 11, 31, 59]. Chính vì thế, việc nghiên cứu tính ổn định và điều khiển của các hệ phương trình suy biến có trễ là bài toán có ý nghĩa cả về phương diện lý thuyết lẫn thực tiễn ứng dụng. Tuy nhiên, cái giá phải trả ở đây là việc nghiên cứu các bài toán này sẽ ít nhiều phức tạp hơn so với các hệ phương trình thông thường bởi vì khác với hệ phương trình vi/sai phân thường, khi xét hệ suy biến bài toán về sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm không phải lúc nào cũng được thỏa mãn, ngay cả trong trường hợp đơn giản nhất: hệ được xét là tuyến tính [9]. Hơn nữa, khi sử dụng phương pháp phiếm hàm Lyapunov–Krasovskii, việc xây dựng và đánh

giá đạo hàm/sai phân của phiếm hàm này dọc theo các nghiệm của hệ thường là khó hơn so với các hệ thông thường [11, 23, 38, 59].

Hiện nay, việc nghiên cứu tính ổn định và điều khiển các hệ suy biến đang được nhiều nhà toán học và kỹ sư quan tâm phát triển theo cả hai hướng lý thuyết và ứng dụng, với ngày càng nhiều công trình có giá trị được xuất bản. Chúng tôi xin điểm sơ qua về tình hình nghiên cứu dành cho lớp hệ này như sau. Tính ổn định và ổn định hóa cho hệ (với bước nhảy Markov) suy biến rời rạc phi tuyến không có trễ được Song và các cộng sự xét đến trong [49]. Rất nhanh sau đó, kết quả này được phát triển tiếp cho hệ có trễ biến thiên trong [55]. Về bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn thì loạt bài báo [61], [36] và [37] theo thứ tự đó đã xét bài toán này cho hệ suy biến rời rạc tuyến tính không có trễ, có trễ hằng và có trễ biến thiên một cách tương ứng. Một mô hình cho hệ nơ-ron suy biến rời rạc có thể được tìm thấy trong [19]. Việc khảo sát hệ suy biến bằng cách vận dụng hệ nơ-ron đã được thực hiện trong [27]. Cuối cùng, tính ổn định của hệ nơ-ron suy biến rời rạc với bước nhảy Markov được Ma và Zheng [39] đề cập năm 2016.

Theo sự hiểu biết của chúng tôi thì, cho đến thời điểm hiện tại, việc nghiên cứu bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ phương trình (3) với độ trễ $d(k)$ biến thiên dạng khoảng vẫn chưa nhận được sự quan tâm của các nhà nghiên cứu. Trong bối cảnh đó, chúng tôi đề xuất bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ (3). Các phiếm hàm Lyapunov–Krasovskii sẵn có trong các công trình liên quan [36, 37, 55, 62] không thể sử dụng để giải quyết vấn đề đặt ra cho hệ (3) do các bài toán đặt ra là khác nhau. Vì thế, dựa trên kỹ thuật đã được sử dụng khá hiệu quả để giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ (2) cùng các cách tiếp cận trong [42, 55, 62], chúng tôi đã giải quyết được bài toán này, không quên tính đến việc chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm cùng tính chính quy và nhân quả của hệ.

3. MỤC ĐÍCH, ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

- **Mục đích nghiên cứu:** Nghiên cứu xây dựng các phiếm hàm kiểu Lyapunov–Krasovskii mới để thu được các tiêu chuẩn mới có ý nghĩa giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho các lớp hệ phương trình vi/sai phân hàm đã biết có cấu trúc trễ mở rộng và các lớp hệ phương trình vi/sai phân hàm có cấu trúc tổng quát hơn.

- **Đối tượng nghiên cứu:** Đối tượng nghiên cứu của luận án là "Bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho một số lớp hệ phương trình có trễ". Cụ thể hơn, yếu tố trễ được quan tâm ở đây là những hàm biến thiên theo thời gian, có giá trị thuộc một khoảng trong $\mathbb{R}$ hoặc trong $\mathbb{N}$ và tùy từng trường hợp mà hệ được xét sẽ là hệ suy biến hay hệ thông thường.

- **Phạm vi nghiên cứu**

  - **Nội dung 1:** Bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho lớp hệ nơ-ron có trễ biến thiên hỗn hợp.
  - **Nội dung 2:** Bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng.
  - **Nội dung 3:** Bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron rời rạc suy biến có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Luận án sử dụng một số công cụ hiện có trong giải tích, đại số tuyến tính, phương trình vi phân thường, phương trình vi phân suy biến để thực hiện các nội dung nghiên cứu nêu trên. Cụ thể hơn, các kỹ thuật được chúng tôi sử dụng ứng với mỗi nội dung như sau:

- **Với Nội dung 1:** xây dựng một bộ các phiếm hàm Lyapunov–Krasovskii mới, mà chủ yếu dựa trên thông tin về cận dưới và cận trên của hàm trễ, kết hợp với công thức Newton–Leibniz, bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Jensen, bổ đề phần bù Schur, kỹ thuật LMI cùng với việc phát triển các kỹ thuật xử lý bài toán đã được các tác giả tiến hành trong [7, 25, 52].

- **Với Nội dung 2:** xây dựng một bộ các phiếm hàm kiểu Lyapunov–Krasovskii mới (phụ thuộc cả cận trên lẫn cận dưới của hàm trễ), kết hợp với bổ đề phần bù Schur, đồng thời tận dụng triệt để kỹ thuật LMI như trong [63].

- **Với Nội dung 3:** bên cạnh việc tiếp tục khai thác lược đồ đã sử dụng để nghiên cứu Nội dung 2, chúng tôi còn phát triển các kỹ thuật đặc thù trong [9, 42] để chứng minh tính chính quy, tính nhân quả và vận dụng định lý hàm ẩn như trong [49, 55] để chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm của hệ.

5. KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN

Luận án đã đạt được những kết quả chính sau đây:

- Thiết kế được một hàm điều khiển phản hồi giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho lớp hệ nơ-ron có trễ biến thiên hỗn hợp.

- Đề xuất được các điều kiện đủ đảm bảo tính $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng. Từ đó thiết kế một hàm điều khiển phản hồi giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ này.

- Thiết lập được các kết quả tương ứng cho lớp hệ nơ-ron rời rạc suy biến có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng. Hơn nữa, với lớp hệ này,

chúng tôi còn đồng thời chứng minh được tính chính quy, tính nhân quả và sự tồn tại duy nhất nghiệm của hệ trong lân cận của gốc.

Các kết quả của luận án là mới, có ý nghĩa khoa học và góp phần vào việc hoàn thiện lý thuyết điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ đối với lớp hệ nơ-ron và lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng.

Các kết quả chính đạt được đã được công bố trong 03 bài báo trên các tạp chí khoa học quốc tế uy tín (thuộc danh mục ISI và Scopus) và đã được báo cáo tại:

- Đại hội Toán học toàn quốc lần thứ VIII, Nha Trang, 08/2013;
- Hội thảo Tối ưu và Tính toán Khoa học lần thứ XIII, Ba Vì, 23-25/04/2015;
- Xê-mi-na của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;
- Xê-mi-na của Phòng Tối ưu và Điều khiển, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

6. BỐ CỤC CỦA LUẬN ÁN

Luận án có bố cục như sau. Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục các công trình đã công bố và danh mục Tài liệu tham khảo, luận án gồm 4 chương: Chương 1 tóm tắt một cách có hệ thống các kiến thức chuẩn bị. Chương 2 trình bày một kết quả về tính điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho lớp hệ nơ-ron có trễ biến thiên hỗn hợp. Chương 3 trình bày các kết quả về tính $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn và điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng. Chương 4 trình bày lời giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron rời rạc suy biến có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng cùng các kết quả liên quan.

Chương 1
MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này nhằm giới thiệu tóm tắt một số kết quả kinh điển trong lý thuyết hệ có trễ. Bài toán ổn định, ổn định hóa và bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ sẽ lần lượt được trình bày cùng một số kiến thức bổ trợ khác cần dùng cho các chương sau. Nội dung chủ yếu của chương được trích/dịch từ các nguồn tài liệu [1, 2, 4, 8, 18, 20, 28, 29, 30, 57, 60, 64].

1.1. BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH VÀ ỔN ĐỊNH HÓA HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ TRỄ

1.1.1. Bài toán ổn định

Trong khoa học và kỹ thuật, phương trình vi phân thường được sử dụng như mô hình toán học của các hệ thống. Một giả thiết cơ bản về một hệ thống được mô hình theo cách này là sự tiến hóa trong tương lai của nó phụ thuộc hoàn toàn vào các giá trị hiện tại của các biến trạng thái và độc lập với lịch sử hoạt động của chúng. Chẳng hạn, xét phương trình vi phân cấp một sau đây:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Sự tiến hóa trong tương lai của biến trạng thái x tại thời điểm t chỉ phụ thuộc vào t và $x(t)$, mà không phụ thuộc vào các giá trị của x trước thời điểm t. Nếu sự tiến hóa trong tương lai của trạng thái của một hệ động lực không những phụ thuộc vào các giá trị hiện tại, mà còn phụ thuộc vào những giá trị quá khứ, thì hệ thống được gọi là hệ thống với trễ thời gian. Các hệ thống thực tế thuộc loại này không thể được mô phỏng một cách thỏa đáng bởi một phương

trình vi phân thường; tức là, phương trình vi phân chỉ là một mô hình gần đúng. Có một cách để mô tả các hệ thống như vậy một cách chính xác là sử dụng các phương trình vi phân hàm.

Trong nhiều hệ thống, trễ thời gian có thể nhận giá trị cực đại h. Khi ấy, chúng ta thường quan tâm đến không gian các hàm liên tục hoặc liên tục từng khúc trên đoạn $[-h, 0]$, nhận giá trị trong không gian $\mathbb{R}^n$ mà thường được ký hiệu là $\mathcal{C} = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ và $PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ một cách tương ứng; chuẩn của một phần tử $\phi \in \mathcal{C}$ hoặc $PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ được cho bởi $\|\phi\|_C = \sup_{-h \leqslant s \leqslant 0} \|\phi(s)\|$. Với $t_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, hàm liên tục $x \in C([t_0 - h, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$ và $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, hàm $x_t \in \mathcal{C}$ được xác định bởi $x_t(s) := x(t + s), s \in [-h, 0]$. Như vậy, x_t là đoạn quỹ đạo của hàm $x(\cdot)$ trên khoảng đóng $[t - h, t]$ với chuẩn trong $\mathcal{C}$ được xác định bởi $\|x_t\| := \max_{s \in [-h,0]} \|x(t + s)\|$. Cho $D \subset \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}$ là một tập mở và hàm $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dạng tổng quát của một phương trình vi phân hàm có trễ trên D là

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ và $\dot{x}(t)$ là đạo hàm bên phải của $x(t)$. Ta sẽ viết tắt phương trình này bởi $RFDE(f)$. Phương trình (1.1) ngụ ý rằng đạo hàm của biến trạng thái x tại thời điểm t phụ thuộc theo t và theo $x(\xi)$ với $t - h \leqslant \xi \leqslant t$.

Với $t_0 \in \mathbb{R}$ và $\sigma > 0$ cho trước, một hàm $x(t)$ được gọi là nghiệm của phương trình vi phân có trễ (1.1) trên $[t_0 - h, t_0 + \sigma)$ nếu $x(t) \in C([t_0 - h, t_0 + \sigma), \mathbb{R}^n), (t, x_t) \in D$ và $x(t)$ thỏa mãn phương trình (1.1) với mọi $t \in [t_0, t_0 + \sigma)$. Cho $t_0 \in \mathbb{R}$ và $\phi \in \mathcal{C}$, ta nói $x(t_0, \phi, f)$ là một nghiệm của phương trình (1.1) với hàm điều kiện ban đầu ϕ tại t_0 hoặc đơn giản là một nghiệm đi qua điểm (t_0, ϕ) nếu tồn tại một số $\sigma > 0$ sao cho $x(t_0, \phi, f)$ là nghiệm của hệ (1.1) trên $[t_0 - h, t_0 + \sigma)$ và $x_{t_0} = \phi$. Giá trị của $x(t_0, \phi, f)$ tại t được ký hiệu bởi $x(t; t_0, \phi, f)$. Chúng ta sẽ viết gọn là $x(t_0, \phi)$ hoặc $x(t; t_0, \phi)$ khi hàm f đã rõ từ ngữ cảnh.

Một vấn đề cơ bản trong việc nghiên cứu phương trình vi phân thường lẫn

phương trình vi phân hàm là các câu hỏi về sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm. Ta sẽ có câu trả lời thỏa đáng cho các câu hỏi đó thông qua ba định lý bên dưới.

Định lý 1.1 (Định lý tồn tại nghiệm địa phương, [20]). *Giả sử D là một tập con mở của $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ và $f_0 \in C(D, \mathbb{R}^n)$. Nếu $(t_0, \phi) \in D$ thì tồn tại nghiệm của phương trình $RFDE(f_0)$ đi qua điểm (t_0, ϕ). Tổng quát hơn, nếu $W \subset D$ là một tập compact và $f_0 \in C(D, \mathbb{R}^n)$ cho trước, thì tồn tại một lân cận $V \subset D$ của W sao cho $f_0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$, tồn tại một lân cận $U \subset C^0(V, \mathbb{R}^n)$ của f_0 và $\alpha > 0$ sao cho với mọi $(t_0, \phi) \in W$, $f \in U$, tồn tại nghiệm $x(t_0, \phi, f)$ của phương trình $RFDE(f)$ đi qua điểm (t_0, ϕ) và xác định trên $[t_0 - h, t_0 + \alpha]$.*

Ở đây $C^0(V, \mathbb{R}^n)$ là tập con của $C(V, \mathbb{R}^n)$, mà gồm tất cả các hàm liên tục bị chặn từ V vào $\mathbb{R}^n$. $C^0(V, \mathbb{R}^n)$ sẽ trở thành một không gian Banach nếu được trang bị chuẩn $\|f\|_{C^0} = \sup_{(t,\phi)\in V} \|f(t, \phi)\|$.

Định lý 1.2 (Định lý tồn tại duy nhất nghiệm địa phương, [20]). *Giả sử D là một tập mở của $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ liên tục và $f(t, \phi)$ là Lipschitz theo ϕ trong mỗi tập con compact của D. Nếu $(t_0, \phi) \in D$ thì tồn tại duy nhất nghiệm đi qua điểm (t_0, ϕ) của phương trình $RFDE(f)$.*

Định lý 1.3 (Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm toàn cục, [28]). *Giả sử hàm*

$$f : [0, +\infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) Với bất kỳ $H > 0$, tồn tại $M(H) > 0$ sao cho

$$\|f(t, \phi)\| \leqslant M(H) \ \ \forall (t, \phi) \in [0, +\infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n), \ \ \|\phi\|_C \leqslant H;$$

(ii) Hàm $f(t, \phi)$ là liên tục trên tập $[0, +\infty) \times PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ theo cả hai biến;

(iii) Hàm $f(t,\phi)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến thứ hai, tức là tồn tại hằng số Lipschitz $L(H) > 0$ sao cho

$$\|f(t,\phi_1) - f(t,\phi_2)\| \leqslant L(H)\|\phi_1 - \phi_2\|_C,$$

với mọi $t \geqslant 0,\ \phi_i \in PC([-h,0],\mathbb{R}^n),\ \|\phi_i\|_C \leqslant H,\ i = 1,2;$

(iv) $$\|f(t,\phi)\| \leqslant \eta(\|\phi\|_C),\ \ t \geqslant 0,\ \phi \in PC([-h,0],\mathbb{R}^n),$$

trong đó $\eta : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục, không giảm và sao cho với $r_0 \geqslant 0$ bất kỳ điều kiện sau đúng

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{r_0}^{R} \frac{dr}{\eta(r)} = +\infty.$$

Khi đó, với $t_0 \geqslant 0$ và $\phi \in PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ cho trước, hệ (1.1) có duy nhất nghiệm $x(t_0,\phi,f)$ xác định trên $[t_0 - h, +\infty)$ với điều kiện ban đầu $x_{t_0} = \phi$.

Giả sử $y(t)$ là một nghiệm của phương trình (1.1). Tính ổn định của nghiệm phụ thuộc vào dáng điệu của hệ khi quỹ đạo $x(t)$ của hệ lệch khỏi $y(t)$. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng phương trình (1.1) có nghiệm $x(t) = 0$, mà sẽ được nhắc đến như nghiệm tầm thường. Nếu tính ổn định của một nghiệm không tầm thường $y(t)$ cần được nghiên cứu, thì ta có thể sử dụng phép đổi biến $z(t) = x(t) - y(t)$ để đi đến hệ mới

$$\dot{z}(t) = f(t, z_t + y_t) - f(t, y_t)$$

mà rõ ràng là có nghiệm tầm thường $z(t) = 0$. Như vậy, việc phân tích tính ổn định của nghiệm không tầm thường $y(t)$ của (1.1) được quy về việc phân tích tính ổn định của nghiệm tầm thường của hệ mới nêu trên. Hơn nữa, lưu ý rằng với hệ tuyến tính, tính ổn định của nghiệm tầm thường sẽ tương đương với tính ổn định của tất cả các nghiệm.

Định nghĩa 1.1 ([18]). • Nghiệm tầm thường của phương trình (1.1) được gọi là ổn định nếu với mọi $t_0 \in \mathbb{R}$ và mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(t_0,\varepsilon) > 0$ sao cho nếu $\|\phi\|_C < \delta$ thì $\|x(t;t_0,\phi)\| < \varepsilon$ với $t \geqslant t_0$.

- Nghiệm tầm thường của phương trình (1.1) được gọi là ổn định đều nếu số δ ở trên có thể được chọn không phụ thuộc vào t_0.
- Nghiệm tầm thường của phương trình (1.1) được gọi là ổn định tiệm cận nếu nó ổn định và tồn tại $\delta_a = \delta_a(t_0) > 0$ sao cho nếu $\|\phi\|_C < \delta_a$ thì $\lim\limits_{t\to\infty} x(t; t_0, \phi) = 0$.
- Nghiệm tầm thường của phương trình (1.1) được gọi là ổn định tiệm cận đều nếu nó ổn định đều và tồn tại $\delta_a > 0$ sao cho với mỗi $\eta > 0$, tồn tại $T = T(\delta_a, \eta)$ sao cho nếu $\|\phi\|_C < \delta_a$ thì $\|x(t; t_0, \phi)\| < \eta$ với $t \geqslant t_0 + T$, và $t_0 \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.2 ([28])**.** Nghiệm tầm thường của phương trình (1.1) được gọi là $\alpha-$ổn định mũ nếu tồn tại các hằng số $\alpha > 0$ và $M \geqslant 1$ sao cho với nghiệm $x(t; t_0, \phi)$ bất kỳ của phương trình (1.1), ước lượng sau đúng

$$\|x(t; t_0, \phi)\| \leqslant M\|\phi\|_C e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \forall t \geqslant t_0.$$

Cũng như lớp hệ không có trễ, phương pháp Lyapunov là một cách hiệu quả để xác định tính ổn định của hệ có trễ. Khi không có trễ, việc xác định này đòi hỏi phải xây dựng một hàm Lyapunov, $V(t, x(t))$, mà có thể xem như một thước đo mức độ trạng thái $x(t)$ lệch khỏi nghiệm tầm thường 0. Lúc ấy, trong một hệ không có trễ, chúng ta cần $x(t)$ để xác định sự tiến triển trong tương lai của hệ sau thời điểm t. Trong một hệ có trễ, chúng ta cũng cần "trạng thái" tại thời điểm t cho mục đích đó; đó là giá trị của $x(t)$ trong khoảng $[t-h, t]$ (có nghĩa là, x_t). Vì vậy, sẽ là tự nhiên để mong đợi rằng, với một hệ có trễ, thay vì hàm Lyapunov sẽ là một phiếm hàm, $V(t, x_t)$, phụ thuộc vào x_t và cho biết mức độ của x_t lệch khỏi nghiệm tầm thường 0. Kiểu phiếm hàm này được gọi là phiếm hàm Lyapunov–Krasovskii. Theo tinh thần đó, trong phần tiếp theo, chúng tôi sẽ trình bày định nghĩa phiếm hàm Lyapunov–Krasovskii và một số điều kiện đủ cho tính ổn định của nghiệm tầm thường của phương trình (1.1). Các kết quả này được đề xuất bởi Krasovskii cho phương trình vi

phân có trễ dựa trên phương pháp thứ hai của Lyapunov. Trước khi bắt đầu, chúng ta ký hiệu $Q_H := \{\phi \in \mathcal{C} : \|\phi\|_C \leqslant H\}$ và giả sử với mỗi $H > 0$, hàm $f : \mathbb{R} \times Q_H \longrightarrow \mathbb{R}$ là liên tục, bị chặn và thỏa mãn điều kiện Lipschitz địa phương theo biến thứ hai.

Định nghĩa 1.3 ([18, 20, 30])**.** Giả sử $V : \mathbb{R} \times Q_H \longrightarrow \mathbb{R}$ là một phiếm hàm liên tục và $x_t(\tau, \phi)$ là nghiệm của (1.1) tại thời điểm t với điều kiện ban đầu $x_\tau = \phi$. Đạo hàm trên bên phải của $V(t, x_t)$ theo t tại thời điểm $t = \tau$ là:

$$\dot{V}(\tau, \phi) = \limsup_{\Delta t \to 0+} \frac{V(\tau + \Delta t, x_{\tau+\Delta t}(\tau, \phi)) - V(\tau, \phi)}{\Delta t}.$$

Định nghĩa 1.4 ([29, 30])**.** Phiếm hàm $V : \mathbb{R} \times Q_H \longrightarrow \mathbb{R}$ liên tục và $V(t, 0) \equiv 0$ được gọi là phiếm hàm Lyapunov–Krasovskii của phương trình (1.1) nếu các điều kiện sau thỏa mãn

(i) Phiếm hàm $V(t, \phi)$ là xác định dương theo nghĩa

$$\exists u \in \mathcal{K} : \quad u(\|\phi(0)\|) \leqslant V(t, \phi) \ \ \forall \phi \in Q_H, \ t \in \mathbb{R};$$

(ii) $\dot{V}(t, \phi) \leqslant 0 \ \ \forall \phi \in Q_H$.

Định lý 1.4 (Định lý Lyapunov–Krasovskii về ổn định, [29, 30])**.** *Nếu phương trình (1.1) có phiếm hàm Lyapunov–Krasovskii thì nghiệm tầm thường của nó là ổn định.*

Định lý 1.5 (Định lý Lyapunov–Krasovskii về ổn định và ổn định tiệm cận, [18, 20, 29])**.** *Giả sử $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ánh xạ từ $\mathbb{R} \times$(các tập bị chặn trong $\mathcal{C}$) vào tập bị chặn của $\mathbb{R}^n$, hai hàm $u, v \in \mathcal{K}$ và $w : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ là hàm liên tục không giảm. Nếu tồn tại một phiếm hàm liên tục $V : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ sao cho*

(i) $u(\|\phi(0)\|) \leqslant V(t, \phi) \leqslant v(\|\phi\|_C)$,

(ii) $\dot{V}(t, \phi) \leqslant -w(\|\phi(0)\|)$,

thì nghiệm tầm thường của phương trình (1.1) là ổn định đều. Nếu $w(s) > 0$ với $s > 0$ thì nghiệm tầm thường là ổn định tiệm cận đều.

Định lý 1.6 (Định lý Lyapunov–Krasovskii về ổn định mũ, [28])**.** *Nếu tồn tại phiếm hàm liên tục $V : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

(i) tồn tại $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ sao cho $\lambda_1 \|\phi(0)\|^2 \leqslant V(t,\phi) \leqslant \lambda_2 \|\phi\|_C^2$,

(ii) $\dot{V}(t,\phi) \leqslant 0$,

thì nghiệm tầm thường của phương trình (1.1) là ổn định và nghiệm bất kỳ của nó là bị chặn, tức là tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\|x(t;t_0,\phi)\| \leqslant M\|\phi\|_C \ \ \forall (t_0,\phi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C},\ t \geqslant t_0.$$

Nếu thay điều kiện (ii) bằng điều kiện

(iii) tồn tại $\lambda_0 > 0$ sao cho $\dot{V}(t,\phi) \leqslant -2\lambda_0 V(t,\phi)$ với mọi $(t,\phi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}$,

thì nghiệm tầm thường của phương trình (1.1) là ổn định mũ và nghiệm bất kỳ của hệ thỏa mãn

$$\|x(t;t_0,\phi)\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\|\phi\|_C e^{-\lambda_0(t-t_0)} \ \ \forall t \geqslant t_0.$$

Giả sử τ là số nguyên nào đó thuộc $\mathbb{Z}_+$, ký hiệu $\mathbb{I} = \{-\tau, -\tau+1, \ldots, -1, 0\}$ và đặt $\mathscr{C} = \{\varphi : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n\}$, trong đó chuẩn của mỗi phần tử $\varphi \in \mathscr{C}$ được định nghĩa là $\|\varphi\|_{\mathscr{C}} = \max\limits_{k\in\mathbb{I}} \|\varphi(k)\|$. Xét phương trình sai phân với trễ hữu hạn có dạng

$$x(k+1) = f(k, x_k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.2}$$

ở đây $x(k) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $f : \mathbb{Z}_+ \times \mathscr{C}_H \longrightarrow \mathbb{R}^n$ là hàm véc tơ cho trước, trong đó $\mathscr{C}_H := \{\varphi \in \mathscr{C} : \|\varphi\|_{\mathscr{C}} \leqslant H\}$ với $H > 0$ là hằng số nào đó; và x_k ám chỉ sự hạn chế của $x(\cdot)$ lên khoảng $[k-\tau, k]$, tức là $x_k(s) = x(k+s)\ \ \forall s \in \mathbb{I}$.

Giả sử rằng $f(k,0) = 0\ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$ (lúc đó (1.2) có nghiệm tầm thường $x(\cdot) \equiv 0$) và với $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi \in \mathscr{C}_H$ cho trước bất kỳ, (1.2) có duy nhất nghiệm,

được ký hiệu bởi $x(k; k_0, \varphi)$, mà thỏa mãn (1.2) với mọi số nguyên $k \geqslant k_0$ và $x_{k_0} = \varphi$, tức là $x(k_0 + s; k_0, \varphi) = \varphi(s) \ \ \forall s \in \mathbb{I}$. Hơn nữa, giả sử tồn tại một hằng số $L > 0$ sao cho $\|f(k, \varphi)\| \leqslant L\|\varphi\|_{\mathscr{C}} \ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$ và $\forall \varphi \in \mathscr{C}_H$. Lúc này, các khái niệm ổn định đã nêu ở trên cho hệ (1.1) có thể được phát biểu lại theo cách hoàn toàn tương tự cho lớp hệ (1.2). Thật vậy, ta có

Định nghĩa 1.5 ([60]).

- Nghiệm tầm thường của phương trình (1.2) được gọi là ổn định nếu với bất kỳ $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ và bất kỳ $\varepsilon > 0$, tồn tại số thực $\delta = \delta(k_0, \varepsilon) > 0$ sao cho nếu $\|\varphi\|_{\mathscr{C}} < \delta$ thì $\|x(k; k_0, \varphi)\| < \varepsilon$ với mọi $k \geqslant k_0$.

- Nghiệm tầm thường của phương trình (1.2) được gọi là ổn định tiệm cận nếu nó ổn định và với mọi $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, tồn tại số thực $\delta_a = \delta_a(k_0) > 0$ sao cho nếu $\|\varphi\|_{\mathscr{C}} < \delta_a$ thì $\lim\limits_{k \to \infty} \|x(k; k_0, \varphi)\| = 0$.

1.1.2. Bài toán ổn định hóa

Xét hệ điều khiển có trễ

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t, u(t)), \quad t \geqslant 0, \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{aligned} \tag{1.3}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(\cdot) \in L^2([0, +\infty), \mathbb{R}^m)$ là hàm điều khiển, $h \geqslant 0$ là trễ hằng số, $\phi \in \mathcal{C}$ là hàm điều kiện ban đầu, $f : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ là hàm véc tơ cho trước thỏa mãn điều kiện $f(t, 0, 0) = 0 \ \forall t \geqslant 0$.

Định nghĩa 1.6 ([1]). Hệ điều khiển (1.3) gọi là ổn định hóa được nếu tồn tại hàm $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g(0) = 0$, sao cho nghiệm tầm thường của hệ phương trình vi phân

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, g(x(t))), \quad t \geqslant 0, \tag{1.4}$$

là ổn định tiệm cận. Trong trường hợp này, hàm $u(t) = g(x(t))$ được gọi là hàm điều khiển phản hồi ổn định hóa hệ thống.

Định nghĩa 1.7 ([1]). Cho số thực $\alpha > 0$. Hệ điều khiển (1.3) gọi là $\alpha-$ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại hàm $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ g(0) = 0$, sao cho nghiệm tầm thường của hệ đóng (1.4) là $\alpha-$ổn định mũ.

Tiếp theo là phần trình bày về tính ổn định hóa được của hệ rời rạc. Xét hệ điều khiển có trễ

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(k, x_k, u(k)), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(k) &= \varphi(k), \quad k \in \mathbb{I}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $u(k) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển; $\tau \in \mathbb{Z}_+$ là trễ hằng; $\varphi \in \mathscr{C}$ là hàm điều kiện ban đầu; $f : \mathbb{Z}_+ \times \mathscr{C}_H \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ là hàm véc tơ cho trước thỏa mãn điều kiện $f(k, 0, 0) = 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$.

Sửa đổi đôi chút Định nghĩa 1.6, ta được

Định nghĩa 1.8. Hệ điều khiển (1.5) gọi là ổn định hóa được nếu tồn tại hàm $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ g(0) = 0$, sao cho nghiệm tầm thường của hệ đóng

$$x(k+1) = f(k, x_k, g(x(k))), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

là ổn định tiệm cận. Lúc này, hàm $u(k) = g(x(k))$ được gọi là hàm điều khiển phản hồi ổn định hóa hệ thống.

1.2. BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN $\mathcal{H}_\infty$

1.2.1. Không gian $\mathcal{H}_\infty$

Chữ cái "$\mathcal{H}$" trong ký hiệu $\mathcal{H}_\infty$ là viết tắt của chữ Hardy (lấy theo tên của nhà toán học G.H. Hardy).

Định nghĩa 1.9 ([57, 64]). Không gian $\mathcal{H}_\infty$ là không gian các hàm ma trận, $F(s)$, giải tích trên nửa mặt phẳng mở $\mathrm{Re}(s) > 0$, nhận giá trị trong $\mathbb{C}^{m\times n}$ và thỏa mãn

$$\|F\|_\infty := \sup\left\{\sigma_{\max}(F(s)) : s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0\right\}\ < +\infty.$$

Biểu thức trên xác định $\|F\|_\infty$, chuẩn $\mathcal{H}_\infty$ của hàm ma trận $F(s)$.

Xét hệ điều khiển tuyến tính:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1u(t) + G_1\omega(t), \quad t \geqslant 0, \\ z(t) &= Cx(t) + B_2u(t) + G_2\omega(t), \\ x(0) &= 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ là véc tơ điều khiển, $\omega \in L^2([0,\infty), \mathbb{R}^q)$ là hàm nhiễu đầu vào, $z \in L^2([0,\infty), \mathbb{R}^p)$ là hàm quan sát đầu ra; A, C, B_1, B_2, G_1, G_2 là các ma trận thực cho trước với số chiều thích hợp.

Định nghĩa 1.10 ([64])**.** Cho $\omega \in L^2([0,\infty), \mathbb{R}^q)$ và $z \in L^2([0,\infty), \mathbb{R}^p)$. Ma trận chuyển từ ω tới z, mà ta sẽ ký hiệu là $T_{z\omega}$, được định nghĩa như sau

$$Z(s) = T_{z\omega}(s)\Omega(s), \quad s \in \mathbb{C},$$

trong đó $Z(s), \Omega(s)$ là các biến đổi Laplace của $z(t), \omega(t)$ tương ứng:

$$Z(s) = \int_0^\infty e^{-st} z(t)dt, \quad \Omega(s) = \int_0^\infty e^{-st}\omega(t)dt,$$

với điều kiện đầu bằng không ($x(0) = 0$).

Việc thiết kế hàm điều khiển phản hồi $u(t) = Kx(t)$ cho hệ (1.6) sẽ dẫn đến hệ đóng ổn định sau đây:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B_1K)x(t) + G_1\omega(t), \quad t \geqslant 0, \\ z(t) &= (C + B_2K)x(t) + G_2\omega(t), \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Giả sử $X(s), Z(s)$ và $\Omega(s)$ tương ứng là biến đổi Laplace của $x(t), z(t)$ và $\omega(t)$. Biến đổi Laplace hai vế của hệ (1.7) ta được

$$sX(s) = (A + B_1K)X(s) + G_1\Omega(s), \quad Z(s) = (C + B_2K)X(s) + G_2\Omega(s).$$

Suy ra

$$Z(s) = \left[(C + B_2K)(sI - (A + B_1K))^{-1}G_1 + G_2\right]\Omega(s),$$

(do ma trận K được chọn sao cho hệ (1.7) ổn định, $(sI - (A + B_1K))^{-1}$ tồn tại với mọi s thuộc nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}(s) \geqslant 0$). Biểu thức này xác định cho ta ma trận chuyển

$$T_{z\omega}(s) = (C + B_2K)(sI - (A + B_1K))^{-1}G_1 + G_2.$$

Hơn nữa, $T_{z\omega} \in \mathcal{H}_\infty$. Trong trường hợp $T_{z\omega}(s) = T(s)$ chỉ phụ thuộc s và $T \in \mathcal{H}_\infty$ thì người ta chứng minh được rằng [64]

$$\|T\|_\infty = \sup_{\omega \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|\omega\|_2},$$

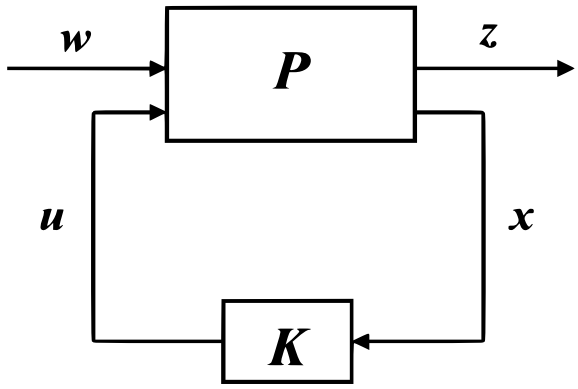
trong đó

$$\|\omega\|_2 := \left(\int_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt\right)^{1/2} \quad \text{và} \quad \|z\|_2 := \left(\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt\right)^{1/2}$$

tương ứng là năng lượng của tín hiệu đầu vào và tín hiệu đầu ra. Do đó, chuẩn $\mathcal{H}_\infty$ của ma trận chuyển phản ánh tỉ số cực đại của năng lượng tín hiệu đầu ra $\|z\|_2$ với năng lượng tín hiệu đầu vào $\|\omega\|_2$, nghĩa là tỉ số hiệu chỉnh năng lượng cực đại của hệ thống. Trong các hệ thống thực, nếu coi ω là hàm nhiễu đầu vào và z là hàm lỗi (mà ta muốn giảm thiểu), chuẩn $\mathcal{H}_\infty$ của ma trận chuyển, tức $\sup\limits_{\omega \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|\omega\|_2}$, càng nhỏ cho thấy hiệu suất của hệ thống càng cao.

1.2.2. Bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$

Xét hệ thống được mô tả bởi sơ đồ khối như Hình 1.1. Giả sử rằng các mô hình không gian trạng thái của thiết bị P và bộ điều khiển K là sẵn có và sự vận hành (realization) của chúng là có thể ổn định hóa và quan sát được. Nhắc lại rằng một bộ điều khiển được gọi là *chấp nhận được* nếu nó ổn định nội bộ hệ thống (tức khi không có sự hiện diện diện của nhiễu đầu vào ω, hệ đóng là ổn định). Rõ ràng, sự ổn định nội bộ là yêu cầu cơ bản nhất cho một



Hình 1.1: Sơ đồ khối của một hệ thống

hệ thống thực tế để có thể vận hành. Do đó bất kỳ bộ điều khiển hợp lý nào cũng phải chấp nhận được. Việc thiết kế các điều khiển chấp nhận được K là nhằm mục đích hạn chế ảnh hưởng của nhiễu đầu vào ω lên các tín hiệu lỗi đầu ra z. Theo đó, bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ có thể được phân ra thành hai loại như sau.

Bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ tối ưu. Tìm mọi điều khiển chấp nhận được K sao cho $\|T_{z\omega}\|_\infty$ là nhỏ nhất.

Việc tìm kiếm một bộ điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ tối ưu thường phức tạp cả về mặt lý thuyết lẫn tính toán số [17]. Điều này là hoàn toàn trái ngược với lý thuyết $\mathcal{H}_2$ chuẩn (the standard $\mathcal{H}_2$ theory), bởi vì trong lý thuyết $\mathcal{H}_2$ chuẩn bộ điều khiển tối ưu là duy nhất và có thể thu được bằng cách giải hai phương trình Riccati mà không dùng phép lặp nào. Việc biết chuẩn $\mathcal{H}_\infty$ tối ưu (cực tiểu) có thể hữu ích về mặt lý thuyết vì nó đặt ra một giới hạn về những gì chúng ta có thể đạt được. Tuy nhiên, trong thực tế thường là không cần thiết và đôi khi thậm chí có thể gây rắc rối để tìm cách thiết kế một bộ điều khiển tối ưu, và thường "rẻ" hơn nhiều để thu được các bộ điều khiển rất gần (theo nghĩa chuẩn) với các bộ điều khiển tối ưu, mà sẽ được gọi là các bộ điều khiển dưới tối ưu. Một bộ điều khiển dưới tối ưu cũng có thể có các thuộc tính tốt khác (chẳng hạn, băng thông thấp hơn) so với các bộ điều khiển tối ưu.

Bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ dưới tối ưu. Cho trước $\gamma > 0$. Tìm mọi điều khiển chấp nhận được K, nếu có, sao cho $\|T_{z\omega}\|_\infty \leqslant \gamma$.

Vì những lý do nêu trên, trong luận án này chúng ta sẽ chỉ tập trung sự chú ý vào điều khiển dưới tối ưu. Nhận xét rằng bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ dưới tối ưu (khi $T_{z\omega}(s)$ chỉ phụ thuộc s và $T_{z\omega} \in \mathcal{H}_\infty$) thực chất là tìm tất cả điều khiển chấp nhận được K sao cho

$$\|z\|_2 \leqslant \gamma\|\omega\|_2 \quad \forall \omega \in L^2([0,\infty), \mathbb{R}^q).$$

1.3. BẤT ĐẲNG THỨC MA TRẬN TUYẾN TÍNH

Trong vài thập kỷ qua, bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMI) đã trở thành một chủ đề nóng trong lĩnh vực phân tích và thiết kế các hệ thống điều khiển [8]. Điều này là bởi các tính chất tốt của LMI, những đột phá trong quy hoạch toán học, sự khám phá ra các thuật toán hữu ích và cách sử dụng chúng để giải các bài toán. Đặc biệt quan trọng là sự phát triển của các thuật toán điểm trong và sự ra mắt của hộp công cụ LMI trong MATLAB. Trước đây, các phương trình Riccati và các bất đẳng thức đã được sử dụng để trình bày và giải hầu hết các bài toán điều khiển; tuy nhiên chúng thường có liên quan đến một lượng lớn các tham số và các ma trận xác định dương đối xứng cần được điều chỉnh trước. Vì vậy, mặc dù một nghiệm có thể tồn tại, nó có thể không nhất thiết được tìm thấy. Đây là một trở ngại lớn khi xử lý các bài toán trong thế giới thực. Trái lại, các LMI không bị khiếm khuyết này, hơn nữa không hề đòi hỏi sự điều chỉnh các tham số [57].

Định nghĩa 1.11 ([57])**.** Một LMI là một ràng buộc có dạng:

$$F(x) = F_0 + x_1F_1 + \cdots + x_mF_m < 0, \tag{1.8}$$

trong đó $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là các biến thực, mà được gọi là các biến quyết định của LMI (1.8); $x = [x_1, \ldots, x_m]^\mathsf{T}$ là một vectơ gồm các biến quyết định, mà

được gọi là véc tơ quyết định; và $F_i = F_i^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 0, 1, \ldots, m$ là các ma trận đối xứng cho trước.

Trong nhiều bài toán ổn định và điều khiển, các biến là các ma trận. Một ví dụ về LMI là bất đẳng thức ma trận Lyapunov:

$$F(X) = A^\mathsf{T} X + XA + Q < 0, \tag{1.9}$$

ở đây $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $Q = Q^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận hằng cho trước và biến $X = X^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là một ma trận chưa biết. Tức là, biến trong bất đẳng thức ma trận này là một ma trận. Thật vậy, giả sử $E_1, E_2, \ldots, E_m$ là một cơ sở trong $S^n = \{N : N = N^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$. Với ma trận đối xứng $X = X^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bất kỳ, gọi $x_1, x_2, \ldots, x_m$, trong đó $m = (n+1)n/2$, là các phần tử độc lập của X. Khi đó, $X = \sum_{i=1}^m x_i E_i$ và vì thế

$$\begin{aligned} F(X) = F\Big(\sum_{i=1}^m x_i E_i\Big) &= A^\mathsf{T}\Big(\sum_{i=1}^m x_i E_i\Big) + \Big(\sum_{i=1}^m x_i E_i\Big)A + Q \\ &= Q + x_1(A^\mathsf{T} E_1 + E_1 A) + \cdots + x_m(A^\mathsf{T} E_m + E_m A) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức ma trận Lyapunov (1.9) với biến quyết định ma trận X là một trường hợp đặc biệt của (1.8), nghĩa là, nó là một LMI.

Tập nghiệm của LMI được gọi là tập chấp nhận được. Nó là một tập con lồi của $\mathbb{R}^m$. Thật vậy, nếu $F(x) < 0$ và $F(y) < 0$ thì $F(z) < 0$, trong đó $z = \theta x + (1-\theta)y$ với mọi $\theta \in [0, 1]$. Tính chất này của các LMI khiến cho các bài toán LMI có thể được giải bằng các phương pháp thường được sử dụng để giải các bài toán tối ưu lồi.

Bài toán LMI tiêu chuẩn: Hãy xác định xem liệu có tồn tại hay không một $x^* \in \mathbb{R}^m$ sao cho $F(x^*) < 0$ đúng.

Đây được gọi là bài toán tính khả thi của LMI. Tức là, nếu tồn tại một x^* như vậy thì LMI là khả thi; ngược lại, nó là không khả thi.

Mục này sẽ được khép lại với một bổ đề nổi tiếng mà thường được sử dụng như một công cụ hữu hiệu để biến đổi các bất đẳng thức ma trận phi tuyến về dạng LMI. Phát biểu chính xác của nó như sau:

Bổ đề 1.1 (Bổ đề phần bù Schur, [8])**.** *Giả sử X, Y, Z là các ma trận hằng với số chiều thích hợp thỏa mãn $X = X^\mathsf{T}$, $Y = Y^\mathsf{T} > 0$. Khi đó*

$$X + Z^\mathsf{T} Y^{-1} Z < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} X & Z^\mathsf{T} \\ Z & -Y \end{bmatrix} < 0.$$

Chương 2
BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN $\mathcal{H}_\infty$ CHO LỚP HỆ NƠ-RON CÓ TRỄ BIẾN THIÊN HỖN HỢP

Chương này nhằm giới thiệu kết quả đầu tiên của luận án. Cụ thể là chúng tôi sẽ trình bày các điều kiện đủ giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho lớp hệ nơ-ron có trễ hỗn hợp. Nội dung của chương được trích từ bài báo [1] trong danh mục các công trình đã công bố của tác giả có liên quan đến luận án.

2.1. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

Xét mô hình mạng nơ-ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên hỗn hợp:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t))) + W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + Bu(t) + C\omega(t) \\
z(t) &= Ex(t) + Mx(t-h(t)) + Nu(t), \quad t \geqslant 0, \\
x(t) &= \varphi(t),\ t \in [-d, 0],
\end{aligned} \tag{2.1}$$

ở đây $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái của mô hình mạng nơ-ron; $u(t) \in L^2([0,s], \mathbb{R}^m)$ $\forall s > 0$, là biến điều khiển đầu vào; $\omega(t) \in L^2([0,\infty), \mathbb{R}^r)$ là biến nhiễu/không chắc chắn đầu vào; $z(t) \in \mathbb{R}^s$ là hàm quan sát đầu ra của mô hình mạng nơ-ron. Ma trận đường chéo $A = \mathrm{diag}\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}, \overline{a}_i > 0$ $\forall i = \overline{1,n}$ biểu thị sự tự hoàn ngược (self-feedback) nơ-ron và các ma trận $W_0, W_1, W_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tương ứng là ma trận liên kết trọng số, ma trận liên kết trọng số với trễ và ma trận liên kết trọng số với trễ phân phối; $B \in \mathbb{R}^{n\times m}, N \in \mathbb{R}^{s\times m}$ là các ma trận điều khiển đầu vào;

$C \in \mathbb{R}^{n\times r}$ là ma trận không chắc chắn/nhiễu đầu vào; $E, M \in \mathbb{R}^{s\times n}$ là các ma trận quan sát đầu ra. $h(t), k(t)$ là các hàm trễ biến thiên theo thời gian thỏa mãn

$$0 \leqslant h_1 \leqslant h(t) \leqslant h_2, \quad 0 \leqslant k(t) \leqslant k, \tag{2.2}$$

ở đây h_1, h_2, k là các hằng số cho trước. Hàm điều kiện ban đầu $\varphi(t) \in C^1([-d, 0], \mathbb{R}^n)$, ở đây $d = \max\{h_2, k\}$, và

$$\begin{aligned} f(x(t)) &= [f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \ldots, f_n(x_n(t))]^{\mathsf{T}}, \\ g(x(t-h(t))) &= [g_1(x_1(t-h(t))), g_2(x_2(t-h(t))), \ldots, g_n(x_n(t-h(t)))]^{\mathsf{T}}, \\ c(x(t)) &= [c_1(x_1(t)), c_2(x_2(t)), \ldots, c_n(x_n(t))]^{\mathsf{T}}, \end{aligned}$$

là các hàm kích hoạt khác nhau sao cho với mỗi $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f_i(\cdot)$, $g_i(\cdot)$ và $c_i(\cdot)$ là các hàm một biến thực liên tục Lipschitz với các hằng số Lipschitz tương ứng là a_i, b_i và c_i. Hơn nữa, giả sử rằng $f_i(0) = g_i(0) = c_i(0) = 0 \ \ \forall i = \overline{1, n}$.

Nhận xét 2.1. (i) Từ các giả thiết trên suy được ngay với mỗi $i \in \{1, \ldots, n\}$, điều kiện tăng trưởng sau đúng:

$$|f_i(\xi)| \leqslant a_i|\xi|, \quad |g_i(\xi)| \leqslant b_i|\xi|, \quad |c_i(\xi)| \leqslant c_i|\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

(ii) Mô hình mạng nơ-ron được mô tả bởi hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên hỗn hợp (2.1) với các hàm kích hoạt khác nhau $f(x(t))$, $g(x(t-h(t)))$, $c(x(t))$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz như trên sẽ tồn tại duy nhất nghiệm trên khoảng $[0, +\infty)$ theo Định lý 1.3, Chương 1.

Định nghĩa 2.1. Cho $\alpha > 0$. Nghiệm $x = 0$ của hệ (2.1) với $u \equiv 0$, $\omega \equiv 0$, được gọi là $\alpha-$ổn định mũ nếu tồn tại một hằng số $N \geqslant 1$ sao cho mọi nghiệm của hệ thỏa mãn

$$\|x(t, \varphi)\| \leqslant N\|\varphi\|_{C^1} e^{-\alpha t} \quad \forall t \geqslant 0.$$

Định nghĩa 2.2. Cho $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho hệ (2.1) tương ứng với α, γ được gọi là giải được nếu tồn tại một hàm điều khiển phản hồi $u(t) = Kx(t)$, $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) Nghiệm $x = 0$ của hệ đóng:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = -[A - BK]x(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t))) \\ + W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds\end{aligned}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-d, 0],$$

là $\alpha-$ổn định mũ.

(ii) Tồn tại một số thực $c_0 > 0$ sao cho

$$\sup \frac{\int\limits_0^\infty \|z(t)\|^2 dt}{c_0\|\varphi\|^2_{C^1} + \int\limits_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt} \leqslant \gamma, \tag{2.4}$$

ở đây supremum được lấy trên mọi hàm điều kiện ban đầu $\varphi(t) \in C^1([-d, 0], \mathbb{R}^n)$ và mọi biến nhiễu $\omega(t) \in L^2([0, \infty), \mathbb{R}^r)$, $\omega \not\equiv 0$.

Trong trường hợp này, ta nói điều khiển phản hồi $u(t) = Kx(t)$ ổn định hóa dạng mũ hệ (2.1).

Nhận xét 2.2. Nhắc lại rằng hầu như mọi hệ thống thực (bao gồm hệ thống điều khiển nơ-ron) đều phải chịu tác động của các nhiễu loạn bên ngoài và trong một số trường hợp điều này có thể làm giảm hiệu suất của hệ thống nếu các hiệu ứng của chúng không được xem xét trong giai đoạn thiết kế. Nhiều phương pháp đã được đề xuất để đối phó với vấn đề này và một trong số đó là kỹ thuật điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ với giả định rằng nhiễu bên ngoài thuộc không gian $L^2[0, \infty)$. Như đã giới thiệu ở Mục 1.2, Chương 1, ý tưởng ở đây là thiết kế một điều khiển dưới tối ưu để giảm thiểu tác động của nhiễu bên ngoài lên đầu ra. Cụ thể là thiết kế một bộ điều khiển nhằm đảm bảo chuẩn $\mathcal{H}_\infty$ của

hàm chuyển giữa đầu ra được kiểm soát $z(t)$ và nhiễu bên ngoài $\omega(t)$ không vượt quá một mức $\gamma > 0$ cho trước. Từ đó, ràng buộc giữa đầu vào và đầu ra

$$\|z\|_2 \leqslant \gamma\|\omega\|_2 \quad \forall \omega \in L^2([0,\infty),\mathbb{R}^q)$$

được thiết lập ở cuối Mục 1.2.2, Chương 1 trong bối cảnh hệ không có trễ và điều kiện ban đầu $x(0) = 0$. Ở đây, (2.4) được chúng tôi đề xuất như một mở rộng của ràng buộc trên thành

$$\|z\|_2^2 \leqslant \gamma(c_0\|\varphi\|_{C^1}^2 + \|\omega\|_2^2) \quad \forall \varphi(\cdot) \in C^1([-d,0],\mathbb{R}^n),\ \forall \omega(\cdot) \in L^2([0,\infty),\mathbb{R}^r),$$

với mục đích đánh giá biến lỗi đầu ra z phụ thuộc vào cả nhiễu ngoại sinh ω và điều kiện ban đầu φ của trạng thái x.

Tiếp theo là một số bổ đề kỹ thuật nổi tiếng, các bổ đề này sẽ được chúng tôi sử dụng trong quá trình chứng minh kết quả chính ở mục tiếp theo.

Bổ đề 2.1 (Bất đẳng thức Cauchy, [57]). *Với bất kỳ $x, y \in \mathbb{R}^n$ và bất kỳ ma trận xác định dương $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ta có*

$$\pm 2y^{\mathsf{T}}x \leqslant y^{\mathsf{T}}Ny + x^{\mathsf{T}}N^{-1}x.$$

Bổ đề 2.2 (Bất đẳng thức Jensen, [18]). *Cho $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đối xứng xác định dương, vô hướng $\gamma > 0$ và hàm véc tơ $\omega : [0,\gamma] \to \mathbb{R}^n$ sao cho các tích phân có liên quan được xác định. Khi đó, ta có đánh giá:*

$$\left(\int_0^\gamma \omega(s)ds\right)^{\mathsf{T}} M \left(\int_0^\gamma \omega(s)ds\right) \leqslant \gamma \int_0^\gamma \omega(s)^{\mathsf{T}} M\omega(s)ds.$$

2.2. KẾT QUẢ CHÍNH

Trước khi trình bày một điều kiện đủ cho sự tồn tại của điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho hệ (2.1), chúng tôi sử dụng một số ký hiệu như sau:

$$F = \mathrm{diag}\{a_1,\ldots,a_n\},\ \ G = \mathrm{diag}\{b_1,\ldots,b_n\},\ \ H = \mathrm{diag}\{c_1,\ldots,c_n\},$$

$$
\begin{aligned}
c^2 &= \max\{c_1^2, \dots, c_n^2\},\\
P_1 &= P^{-1},\ \ Q_1 = P^{-1}QP^{-1},\ \ R_1 = P^{-1}RP^{-1},\ \ S_1 = P^{-1}SP^{-1},\\
\alpha_1 &= \lambda_{\min}(P_1),\\
\alpha_2 &= \lambda_{\max}(P_1) + h_1\lambda_{\max}(Q_1) + \frac{1}{2}h_2^3\lambda_{\max}(R_1)\\
&\quad + \frac{1}{2}(h_2 - h_1)^2(h_2 + h_1)\lambda_{\max}(S_1) + \frac{1}{2}c^2k^2\lambda_{\max}(D_2^{-1}),\\
\Omega_{11} &= -(AP + PA) + Q + 2\alpha P + \frac{2}{\gamma}CC^{\mathsf{T}} + 2ke^{2\alpha k}W_2D_2W_2^{\mathsf{T}} - \frac{3}{4}BB^{\mathsf{T}}\\
&\quad - e^{-2\alpha h_2}R + W_0D_0W_0^{\mathsf{T}} + W_1D_1W_1^{\mathsf{T}},\\
\Omega_{12} &= -PA - \frac{1}{2}BB^{\mathsf{T}},\\
\Omega_{22} &= -2P + h_2^2R + (h_2 - h_1)^2S + 2ke^{2\alpha k}W_2D_2W_2^{\mathsf{T}} + \frac{2}{\gamma}CC^{\mathsf{T}}\\
&\quad + W_0D_0W_0^{\mathsf{T}} + W_1D_1W_1^{\mathsf{T}},\\
\Omega_{33} &= -e^{-2\alpha h_1}Q - e^{-2\alpha h_2}S,\ \ \Omega_{44} = -e^{-2\alpha h_2}R - e^{-2\alpha h_2}S.
\end{aligned}
$$

Hơn nữa, để đơn giản hóa cách trình bày, như trong [44], giả sử rằng các ma trận E, M, N của hệ (2.1) thỏa mãn

$$N^{\mathsf{T}}[E\ \ M] = 0, \quad N^{\mathsf{T}}N = I. \tag{2.5}$$

Tiếp theo là kết quả chính của mục này, mà nhằm cung cấp một điều kiện đủ giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ của hệ nơ-ron (2.1). Về cơ bản, chứng minh được tiến hành dựa trên việc xây dựng các phiếm hàm Lyapunov–Krasovskii thỏa mãn các điều kiện của Định lý 1.6.

Định lý 2.1. *Cho $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Giả sử các ma trận hệ số của hệ (2.1) thỏa mãn điều kiện: tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương P, Q, R, S và ba ma trận đường chéo xác định dương D_0, D_1, D_2 sao cho bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau đúng:*

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & 0 & e^{-2\alpha h_2}R & PE^{\mathsf{T}} & PF & PH & 0 & 0 \\ * & \Omega_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Omega_{33} & e^{-2\alpha h_2}S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Omega_{44} & 0 & 0 & 0 & PM^{\mathsf{T}} & PG \\ * & * & * & * & -\frac{1}{2}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}D_0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{k}D_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\frac{1}{2}D_1 \end{bmatrix} < 0. \tag{2.6}$$

Khi đó, bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ ứng với các hệ số α, γ cho hệ (2.1) là giải được với hàm điều khiển phản hồi ổn định hóa dạng mũ hệ thống

$$u(t) = -\frac{1}{2}B^{\mathsf{T}}P^{-1}x(t), \quad t \geqslant 0,$$

và nghiệm của hệ, khi nhiễu $\omega \equiv 0$, thỏa mãn

$$\|x(t,\varphi)\| \leqslant \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|\varphi\|_{C^1}e^{-\alpha t} \quad \forall t \geqslant 0.$$

Chứng minh. Xét phiếm hàm Lyapunov–Krasovskii như sau:

$$V(t,x_t) = \sum_{i=1}^{5} V_i(t,x_t),$$

trong đó

$$\begin{aligned} V_1(t,x_t) &= x^{\mathsf{T}}(t)P_1x(t), \\ V_2(t,x_t) &= \int_{t-h_1}^{t} e^{2\alpha(s-t)}x^{\mathsf{T}}(s)Q_1x(s)\,ds, \\ V_3(t,x_t) &= h_2\int_{-h_2}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\theta-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\theta)R_1\dot{x}(\theta)\,d\theta ds, \\ V_4(t,x_t) &= (h_2-h_1)\int_{-h_2}^{-h_1}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\theta-t)}\dot{x}^{\mathsf{T}}(\theta)S_1\dot{x}(\theta)\,d\theta ds, \end{aligned}$$

$$V_5(t,x_t) = \int_{-k}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\theta-t)} c^{\mathsf{T}}(x(\theta)) D_2^{-1} c(x(\theta))\, d\theta ds.$$

Không khó để chứng tỏ rằng

$$\alpha_1 \|x(t)\|^2 \leqslant V(t,x_t) \;\; \forall t \geqslant 0 \quad \text{và} \quad V(0,x_0) \leqslant \alpha_2 \|\varphi\|_{C^1}^2. \tag{2.7}$$

Lấy đạo hàm của $V_i(t,x_t), i = 1,\ldots,5$ theo t dọc theo nghiệm của hệ (2.1), ta thu được

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t,x_t) &= 2x^{\mathsf{T}}(t)P_1\dot{x}(t)\\
&= 2x^{\mathsf{T}}(t)P_1\Big[-Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t)))\\
&\qquad\qquad + W_2\int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds + Bu(t) + C\omega(t)\Big],\\
\dot{V}_2(t,x_t) &= x^{\mathsf{T}}(t)Q_1x(t) - e^{-2\alpha h_1}x^{\mathsf{T}}(t-h_1)Q_1x(t-h_1) - 2\alpha V_2(t,x_t),\\
\dot{V}_3(t,x_t) &\leqslant h_2^2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)R_1\dot{x}(t) - h_2e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)R_1\dot{x}(s)\,ds - 2\alpha V_3(t,x_t),\\
\dot{V}_4(t,x_t) &\leqslant (h_2-h_1)^2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)S_1\dot{x}(t) - (h_2-h_1)e^{-2\alpha h_2}\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)S_1\dot{x}(s)\,ds\\
&\quad - 2\alpha V_4(t,x_t),\\
\dot{V}_5(t,x_t) &\leqslant kc^{\mathsf{T}}(x(t))D_2^{-1}c(x(t)) - e^{-2\alpha k}\int_{t-k}^{t} c^{\mathsf{T}}(x(s))D_2^{-1}c(x(s))\,ds\\
&\quad - 2\alpha V_5(t,x_t).
\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 2.2 và công thức Newton-Leibniz, ta đánh giá được

$$\begin{aligned}
&-h_2\int_{t-h_2}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)R_1\dot{x}(s)\,ds\\
&\qquad\leqslant -h(t)\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)R_1\dot{x}(s)\,ds\\
&\qquad\leqslant -\Big(\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}(s)\,ds\Big)^{\mathsf{T}}R_1\Big(\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}(s)\,ds\Big)\\
&\qquad= -[x(t)-x(t-h(t))]^{\mathsf{T}}R_1[x(t)-x(t-h(t))]\\
&\qquad= -x^{\mathsf{T}}(t)R_1x(t) + 2x^{\mathsf{T}}(t)R_1x(t-h(t))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad - x^{\mathsf{T}}(t-h(t))R_1x(t-h(t));\\
&-(h_2-h_1)\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)S_1\dot{x}(s)\,ds\\
&\qquad\leqslant -(h(t)-h_1)\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}^{\mathsf{T}}(s)S_1\dot{x}(s)\,ds\\
&\qquad\leqslant -\Big(\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}(s)\,ds\Big)^{\mathsf{T}}S_1\Big(\int_{t-h(t)}^{t-h_1}\dot{x}(s)\,ds\Big)\\
&\qquad= -[x(t-h_1)-x(t-h(t))]^{\mathsf{T}}S_1[x(t-h_1)-x(t-h(t))]\\
&\qquad= -x^{\mathsf{T}}(t-h_1)S_1x(t-h_1)+2x^{\mathsf{T}}(t-h_1)S_1x(t-h(t))\\
&\qquad\quad - x^{\mathsf{T}}(t-h(t))S_1x(t-h(t)).
\end{aligned}
$$

Sử dụng giả thiết (2.3) và D_2 là ma trận đường chéo xác định dương cho phép ước lượng

$$kc^{\mathsf{T}}(x(t))D_2^{-1}c(x(t))\leqslant kx^{\mathsf{T}}(t)HD_2^{-1}Hx(t).$$

Do đó, ta có

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}(t,x_t)+2\alpha V(t,x_t)\\
&\quad\leqslant x^{\mathsf{T}}(t)\big[-2P_1A-P_1BB^{\mathsf{T}}P_1+Q_1-e^{-2\alpha h_2}R_1+kHD_2^{-1}H+2\alpha P_1\big]x(t)\\
&\qquad+x^{\mathsf{T}}(t)\big[2e^{-2\alpha h_2}R_1\big]x(t-h(t))+\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\big[h_2^2R_1+(h_2-h_1)^2S_1\big]\dot{x}(t)\\
&\qquad+x^{\mathsf{T}}(t-h_1)\big[-e^{-2\alpha h_1}Q_1-e^{-2\alpha h_2}S_1\big]x(t-h_1)\\
&\qquad+x^{\mathsf{T}}(t-h_1)\big[2e^{-2\alpha h_2}S_1\big]x(t-h(t))\\
&\qquad+x^{\mathsf{T}}(t-h(t))\big[-e^{-2\alpha h_2}R_1-e^{-2\alpha h_2}S_1\big]x(t-h(t))\\
&\qquad+2x^{\mathsf{T}}(t)P_1W_0f(x(t))+2x^{\mathsf{T}}(t)P_1W_1g(x(t-h(t)))\\
&\qquad+2x^{\mathsf{T}}(t)P_1W_2\int_{t-k(t)}^{t}c(x(s))ds+2x^{\mathsf{T}}(t)P_1C\omega(t)\\
&\qquad-e^{-2\alpha k}\int_{t-k}^{t}c^{\mathsf{T}}(x(s))D_2^{-1}c(x(s))\,ds. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Nhân hai vế của phương trình

$$-\dot{x}(t) - Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t))) + W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds$$
$$+ Bu(t) + C\omega(t) = 0.$$

với $2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P_1$ ta được

$$2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P_1\Big[-\dot{x}(t) - Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 g(x(t-h(t)))$$
$$+ W_2 \int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds + Bu(t) + C\omega(t)\Big] = 0.$$

Sử dụng Bổ đề 2.1, Bổ đề 2.2, điều kiện (2.3) và D_0, D_1, D_2 là các ma trận đường chéo xác định dương, dễ thấy các ước lượng sau đúng

$$\begin{aligned}
2x^{\mathsf{T}}(t)P_1W_0f(x(t)) &\leqslant x^{\mathsf{T}}(t)P_1W_0D_0W_0^{\mathsf{T}}P_1x(t) + f^{\mathsf{T}}(x(t))D_0^{-1}f(x(t)) \\
&\leqslant x^{\mathsf{T}}(t)P_1W_0D_0W_0^{\mathsf{T}}P_1x(t) + x^{\mathsf{T}}(t)FD_0^{-1}Fx(t), \\
2x^{\mathsf{T}}(t)P_1W_1g(x(t-h(t))) &\leqslant x^{\mathsf{T}}(t)P_1W_1D_1W_1^{\mathsf{T}}P_1x(t) \\
&\quad + g^{\mathsf{T}}(x(t-h(t)))D_1^{-1}g(x(t-h(t))) \\
&\leqslant x^{\mathsf{T}}(t)P_1W_1D_1W_1^{\mathsf{T}}P_1x(t) \\
&\quad + x^{\mathsf{T}}(t-h(t))GD_1^{-1}Gx(t-h(t)), \\
2x^{\mathsf{T}}(t)P_1C\omega(t) &\leqslant \frac{2}{\gamma}x^{\mathsf{T}}(t)P_1CC^{\mathsf{T}}P_1x(t) + \frac{\gamma}{2}\omega^{\mathsf{T}}(t)\omega(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2x^{\mathsf{T}}(t)P_1W_2\int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds \\
&\quad\leqslant 2ke^{2\alpha k}x^{\mathsf{T}}(t)P_1W_2D_2W_2^{\mathsf{T}}P_1x(t) \\
&\qquad\quad + \frac{1}{2ke^{2\alpha k}}\Big(\int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds\Big)^{\mathsf{T}} D_2^{-1}\Big(\int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds\Big) \\
&\quad\leqslant 2ke^{2\alpha k}x^{\mathsf{T}}(t)P_1W_2D_2W_2^{\mathsf{T}}P_1x(t) + \frac{k(t)}{2ke^{2\alpha k}}\int_{t-k(t)}^{t} c^{\mathsf{T}}(x(s))D_2^{-1}c(x(s))ds \\
&\quad\leqslant 2ke^{2\alpha k}x^{\mathsf{T}}(t)P_1W_2D_2W_2^{\mathsf{T}}P_1x(t) + \frac{1}{2e^{2\alpha k}}\int_{t-k}^{t} c^{\mathsf{T}}(x(s))D_2^{-1}c(x(s))ds.
\end{aligned}$$

Tương tự, chúng ta cũng có

$$
\begin{aligned}
2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P_1W_0f(x(t)) &\leqslant \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P_1W_0D_0W_0^{\mathsf{T}}P_1\dot{x}(t) + x^{\mathsf{T}}(t)FD_0^{-1}Fx(t),\\
2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P_1W_1g(x(t-h(t))) &\leqslant \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P_1W_1D_1W_1^{\mathsf{T}}P_1\dot{x}(t)\\
&\quad + x^{\mathsf{T}}(t-h(t))GD_1^{-1}Gx(t-h(t)),\\
2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P_1C\omega(t) &\leqslant \frac{2}{\gamma}\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P_1CC^{\mathsf{T}}P_1\dot{x}(t) + \frac{\gamma}{2}\omega^{\mathsf{T}}(t)\omega(t),\\
2\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P_1W_2\int_{t-k(t)}^{t} c(x(s))ds &\leqslant 2ke^{2\alpha k}\dot{x}^{\mathsf{T}}(t)P_1W_2D_2W_2^{\mathsf{T}}P_1\dot{x}(t)\\
&\quad + \frac{1}{2e^{2\alpha k}}\int_{t-k}^{t} c^{\mathsf{T}}(x(s))D_2^{-1}c(x(s))ds.
\end{aligned}
$$

Vì vậy, từ (2.8) suy ra

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}(t,x_t) + 2\alpha V(t,x_t)\\
&\quad\leqslant x^{\mathsf{T}}(t)\Big[-2P_1A - P_1BB^{\mathsf{T}}P_1 + Q_1 - e^{-2\alpha h_2}R_1 + kHD_2^{-1}H + 2\alpha P_1\\
&\qquad + P_1W_0D_0W_0^{\mathsf{T}}P_1 + 2FD_0^{-1}F + P_1W_1D_1W_1^{\mathsf{T}}P_1 + \frac{2}{\gamma}P_1CC^{\mathsf{T}}P_1\\
&\qquad + 2ke^{2\alpha k}P_1W_2D_2W_2^{\mathsf{T}}P_1\Big]x(t) + x^{\mathsf{T}}(t)\big[-2AP_1 - P_1BB^{\mathsf{T}}P_1\big]\dot{x}(t)\\
&\qquad + x^{\mathsf{T}}(t)\big[2e^{-2\alpha h_2}R_1\big]x(t-h(t))\\
&\qquad + \dot{x}^{\mathsf{T}}(t)\Big[h_2^2R_1 + (h_2-h_1)^2S_1 - 2P_1 + P_1W_0D_0W_0^{\mathsf{T}}P_1\\
&\qquad + P_1W_1D_1W_1^{\mathsf{T}}P_1 + \frac{2}{\gamma}P_1CC^{\mathsf{T}}P_1 + 2ke^{2\alpha k}P_1W_2D_2W_2^{\mathsf{T}}P_1\Big]\dot{x}(t)\\
&\qquad + x^{\mathsf{T}}(t-h_1)\big[-e^{-2\alpha h_1}Q_1 - e^{-2\alpha h_2}S_1\big]x(t-h_1)\\
&\qquad + x^{\mathsf{T}}(t-h_1)\big[2e^{-2\alpha h_2}S_1\big]x(t-h(t))\\
&\qquad + x^{\mathsf{T}}(t-h(t))\big[-e^{-2\alpha h_2}R_1 - e^{-2\alpha h_2}S_1 + 2GD_1^{-1}G\big]x(t-h(t))\\
&\qquad + \gamma\|\omega(t)\|^2. \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

Đặt $y(t) = P^{-1}x(t)$, (2.9) trở thành

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(t,x_t) + 2\alpha V(t,x_t)\\
&\qquad \leqslant y^{\mathsf{T}}(t)\Big[-2AP - BB^{\mathsf{T}} + Q - e^{-2\alpha h_2}R + kPHD_2^{-1}HP + 2\alpha P\\
&\qquad + W_0D_0W_0^{\mathsf{T}} + 2PFD_0^{-1}FP + W_1D_1W_1^{\mathsf{T}} + \frac{2}{\gamma}CC^{\mathsf{T}}\\
&\qquad + 2ke^{2\alpha k}W_2D_2W_2^{\mathsf{T}}\Big]y(t) + y^{\mathsf{T}}(t)\big[-2PA - BB^{\mathsf{T}}\big]\dot{y}(t)\\
&\qquad + y^{\mathsf{T}}(t)\big[2e^{-2\alpha h_2}R\big]y(t-h(t))\\
&\qquad + \dot{y}^{\mathsf{T}}(t)\Big[h_2^2R + (h_2-h_1)^2S - 2P + W_0D_0W_0^{\mathsf{T}} + W_1D_1W_1^{\mathsf{T}}\\
&\qquad + \frac{2}{\gamma}CC^{\mathsf{T}} + 2ke^{2\alpha k}W_2D_2W_2^{\mathsf{T}}\Big]\dot{y}(t)\\
&\qquad + y^{\mathsf{T}}(t-h_1)\big[-e^{-2\alpha h_1}Q - e^{-2\alpha h_2}S\big]y(t-h_1)\\
&\qquad + y^{\mathsf{T}}(t-h_1)\big[2e^{-2\alpha h_2}S\big]y(t-h(t))\\
&\qquad + y^{\mathsf{T}}(t-h(t))\big[-e^{-2\alpha h_2}R - e^{-2\alpha h_2}S + 2PGD_1^{-1}GP\big]y(t-h(t))\\
&\qquad + \gamma\|\omega(t)\|^2.
\end{aligned}$$

Từ đó,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t,x_t) + 2\alpha V(t,x_t) \leqslant\ & \xi^{\mathsf{T}}(t)\Xi\xi(t) + \gamma\|\omega(t)\|^2\\
& - y^{\mathsf{T}}(t)\big[2PE^{\mathsf{T}}EP + \frac{1}{4}BB^{\mathsf{T}}\big]y(t)\\
& - y^{\mathsf{T}}(t-h(t))\big[2PM^{\mathsf{T}}MP\big]y(t-h(t)), \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

với

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} y^{\mathsf{T}}(t) & \dot{y}^{\mathsf{T}}(t) & y^{\mathsf{T}}(t-h_1) & y^{\mathsf{T}}(t-h(t)) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}},$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & 0 & e^{-2\alpha h_2}R\\ * & \Xi_{22} & 0 & 0\\ * & * & \Xi_{33} & e^{-2\alpha h_2}S\\ * & * & * & \Xi_{44} \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{11} = \Omega_{11} + kPHD_2^{-1}HP + 2PFD_0^{-1}FP + 2PE^{\mathsf{T}}EP,$$

$$\Xi_{12} = \Omega_{12}, \quad \Xi_{22} = \Omega_{22}, \quad \Xi_{33} = \Omega_{33},$$
$$\Xi_{44} = \Omega_{44} + 2PGD_1^{-1}GP + 2PM^{\mathsf{T}}MP.$$

Bởi Bổ đề 1.1, dễ thấy rằng $\Xi < 0$ khi và chỉ khi $\Omega < 0$. Vì thế, từ (2.6) và (2.10) suy ra

$$\dot{V}(t, x_t) + 2\alpha V(t, x_t) \leqslant \gamma\|\omega(t)\|^2 - y^{\mathsf{T}}(t)\big[2PE^{\mathsf{T}}EP + \frac{1}{4}BB^{\mathsf{T}}\big]y(t) \\ - y^{\mathsf{T}}(t - h(t))\big[2PM^{\mathsf{T}}MP\big]y(t - h(t)), \tag{2.11}$$

Cho $\omega(t) = 0$, và bởi vì

$$y^{\mathsf{T}}(t)\big[2PE^{\mathsf{T}}EP + \frac{1}{4}BB^{\mathsf{T}}\big]y(t) \geqslant 0, \;\; y^{\mathsf{T}}(t - h(t))\big[2PM^{\mathsf{T}}MP\big]y(t - h(t)) \geqslant 0,$$

từ (2.11) ta thấy rằng

$$\dot{V}(t, x_t) + 2\alpha V(t, x_t) \leqslant 0 \;\; \forall t \geqslant 0. \tag{2.12}$$

Đặt $v(t) = e^{2\alpha t}V(t, x_t)$. Lấy đạo hàm theo thời gian của $v(t)$, ta có

$$\dot{v}(t) = e^{2\alpha t}\Big(\dot{V}(t, x_t) + 2\alpha V(t, x_t)\Big) \leqslant 0 \;\; \forall t \geqslant 0.$$

Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức trên từ 0 tới t, ta thu được

$$v(t) - v(0) \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2\alpha t}V(t, x_t) - V(0, x_0) \leqslant 0.$$

Từ đó suy ra

$$V(t, x_t) \leqslant V(0, x_0)e^{-2\alpha t} \;\; \forall t \geqslant 0.$$

Hơn nữa, bởi (2.7), ta có

$$\alpha_1\|x(t, \varphi)\|^2 \leqslant V(t, x_t) \leqslant V(0, x_0)e^{-2\alpha t} \leqslant \alpha_2\|\varphi\|_{C^1}^2 e^{-2\alpha t},$$

và do đó

$$\|x(t, \varphi)\| \leqslant \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|\varphi\|_{C^1}e^{-\alpha t} \;\; \forall t \geqslant 0,$$

nghĩa là nghiệm $x = 0$ của hệ đóng (khi không có nhiễu) là $\alpha-$ổn định mũ. Để hoàn tất chứng minh của định lý, ta còn phải chứng tỏ điều kiện mức $\gamma-$tối ưu (2.4). Để đạt được điều đó, ta xét mối liên hệ sau đây

$$\int_0^s \big[\|z(t)\|^2-\gamma\|\omega(t)\|^2\big]dt = \int_0^s \big[\|z(t)\|^2-\gamma\|\omega(t)\|^2+\dot{V}(t,x_t)\big]dt-\int_0^s \dot{V}(t,x_t)dt.$$

Từ $V(t,x_t) \geqslant 0$, ta có

$$-\int_0^s \dot{V}(t,x_t)dt = -V(s,x_s) + V(0,x_0) \leqslant V(0,x_0) \ \ \forall s \geqslant 0.$$

Vì vậy, với mọi $s \geqslant 0$,

$$\int_0^s \big[\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2\big]dt \leqslant \int_0^s \big[\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2 + \dot{V}(t,x_t)\big]dt + V(0,x_0). \tag{2.13}$$

Từ cách xây dựng hàm $V(t,x_t)$, dễ thấy

$$V(t,x_t) \geqslant x^{\mathsf{T}}(t)P_1x(t) = y^{\mathsf{T}}(t)Py(t),$$

do đó từ (2.11) thu được

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x_t) \leqslant \gamma\|\omega(t)\|^2 - 2\alpha y^{\mathsf{T}}(t)Py(t) - y^{\mathsf{T}}(t)\big[2PE^{\mathsf{T}}EP + \frac{1}{4}BB^{\mathsf{T}}\big]y(t)\\ - y^{\mathsf{T}}(t-h(t))\big[2PM^{\mathsf{T}}MP\big]y(t-h(t)),\end{aligned} \tag{2.14}$$

Nhận xét rằng bởi (2.1) và (2.5), số hạng $\|z(t)\|^2$ được đánh giá như sau

$$\begin{aligned}\|z(t)\|^2 &= \langle Ex(t), Ex(t)\rangle + 2\langle Mx(t-h(t)), Ex(t)\rangle\\ &\quad + \langle Mx(t-h(t)), Mx(t-h(t))\rangle + \langle u(t), u(t)\rangle\\ &\leqslant 2\langle Ex(t), Ex(t)\rangle + 2\langle Mx(t-h(t)), Mx(t-h(t))\rangle + \langle u(t), u(t)\rangle\\ &= 2y^{\mathsf{T}}(t)\big[PE^{\mathsf{T}}EP\big]y(t) + 2y^{\mathsf{T}}(t-h(t))\big[PM^{\mathsf{T}}MP\big]y(t-h(t))\\ &\quad + \frac{1}{4}y^{\mathsf{T}}(t)\big[BB^{\mathsf{T}}\big]y(t)\\ &= y^{\mathsf{T}}(t)\big[2PE^{\mathsf{T}}EP + \frac{1}{4}BB^{\mathsf{T}}\big]y(t)\\ &\quad + y^{\mathsf{T}}(t-h(t))\big[2PM^{\mathsf{T}}MP\big]y(t-h(t)).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Thay ước lượng của $\dot{V}(t, x_t)$ và $\|z(t)\|^2$ tương ứng được xác định từ (2.14) và (2.15) vào (2.13), ta thu được

$$\int_0^s \big[\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2\big]dt \leqslant \int_0^s \big[-2\alpha y^{\mathsf{T}}(t)Py(t)\big]dt + V(0, x_0).$$

Vì $y^{\mathsf{T}}(t)Py(t) \geqslant 0$ nên điều này kéo theo

$$\int_0^s \big[\|z(t)\|^2 - \gamma\|\omega(t)\|^2\big]dt \leqslant V(0, x_0) \leqslant \alpha_2\|\varphi\|^2_{C^1},$$

mà tương đương với

$$\int_0^s \|z(t)\|^2 dt \leqslant \int_0^s \gamma\|\omega(t)\|^2 dt + \alpha_2\|\varphi\|^2_{C^1}.$$

Bằng cách cho $s \to \infty$, và đặt $c_0 = \frac{\alpha_2}{\gamma} > 0$, bất đẳng thức trên suy ra

$$\frac{\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt}{c_0\|\varphi\|^2_{C^1} + \int_0^\infty \|\omega(t)\|^2 dt} \leqslant \gamma.$$

Ước lượng này đúng với mọi $\omega(t) \in L^2([0, \infty), \mathbb{R}^r)$, $\omega \neq 0$ và mọi $\varphi(t) \in C^1([-d, 0], \mathbb{R}^n)$, do đó điều kiện (2.4) đúng. Điều này hoàn tất chứng minh của định lý. □

Nhận xét 2.3. Trong các tài liệu [21, 32, 45, 47], các ẩn số bổ sung và các ma trận trọng số tự do được giới thiệu để tạo tính linh hoạt trong việc giải các LMI thu được. Tuy nhiên, quá nhiều ẩn số và ma trận trọng số tự do được sử dụng trong các phương pháp hiện hành khiến việc phân tích hệ thống trở nên phức tạp và làm tăng đáng kể nhu cầu tính toán. Để tránh nhược điểm đó, trong Định lý 2.1 chúng tôi hoàn toàn không đưa vào bất cứ ma trận trọng số tự do nào.

Nhận xét 2.4. Kết quả mà chúng tôi đề xuất cũng đã khắc phục được mặt hạn chế trong các kết quả đã có [21, 45, 46, 47] về tính khả vi của độ trễ; hơn nữa, trễ rời rạc $h(t)$ cũng đã được mở rộng thành công sang trường hợp nhận giá trị trong một khoảng, nghĩa là lúc này hàm trễ được phép biến thiên nhanh

theo thời gian với cận dưới h_1 của nó có thể là một số thực dương. Ngoài ra, hàm điều khiển phản hồi ổn định hóa được thiết kế dựa trên việc tìm nghiệm của một bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Vì lý do đó, tiêu chuẩn của chúng tôi là sự mở rộng đáng kể của các tiêu chuẩn đã được đề xuất trong [46, 47].

Nhận xét 2.5. Rõ ràng là các số hạng của ma trận khối Ω phụ thuộc đơn điệu theo độ trễ nên tính khả thi của LMI (2.6) sẽ càng tăng khi các đại lượng h_1, h_2, k càng bé. Đặc biệt, nếu (2.6) có nghiệm với độ trễ h_1, h_2, k dương nào đó thì nó cũng sẽ có nghiệm với mọi $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{k}$ bé hơn h_1, h_2, k theo thứ tự đó.

2.3. VÍ DỤ MINH HỌA

Tiếp theo là một ví dụ số nhằm minh họa cho các ưu điểm nêu trên của Định lý 2.1.

Ví dụ 2.1. Xét hệ nơ-ron (2.1) với các tham số được cho cụ thể như sau

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0.9 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$E = 0.2 \times \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad M = 0.15 \times \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

$$h(t) = \begin{cases} 0.1 + 0.4\sin t & \text{nếu } \ t \in I = \bigcup_{k\geqslant 0}[2k\pi, (2k+1)\pi], \\ 0.1 & \text{nếu } \ t \in \mathbb{R}_+ \setminus I, \end{cases}$$

$k(t) = 0.2\,|\cos t|$ với $t \in \mathbb{R}_+$.

Chú ý rằng các hàm trễ $h(t), k(t)$ là không khả vi, do đó, các hàm điều khiển được thiết kế trong [40, 45, 46, 47] không thể áp dụng cho hệ này.

Bằng cách sử dụng hộp công cụ LMI trong MATLAB [16], bất đẳng thức ma trận tuyến tính (2.6) là giải được với $h_1 = 0.1,\ h_2 = 0.5,\ k = 0.2,\ \alpha = 0.1,\ \gamma = 8$ và

$$P = \begin{bmatrix} 9.9843 & 0.9991 & 3.7546 \\ 0.9991 & 1.2459 & 0.6756 \\ 3.7546 & 0.6756 & 5.8076 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 2.5768 & 0.0721 & 0.7940 \\ 0.0721 & 0.2127 & 0.0504 \\ 0.7940 & 0.0504 & 1.5073 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.5329 & 0.2566 & 0.9224 \\ 0.2566 & 0.1102 & 0.2167 \\ 0.9224 & 0.2167 & 1.3352 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 5.3919 & 0.3018 & 1.9757 \\ 0.3018 & 0.3783 & 0.2556 \\ 1.9757 & 0.2556 & 3.4961 \end{bmatrix},$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0.8189 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9290 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4956 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1.0917 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7752 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8904 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0.9299 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2761 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4320 \end{bmatrix}.$$

Hàm điều khiển phản hồi ổn định hóa hệ thống được xác định bởi

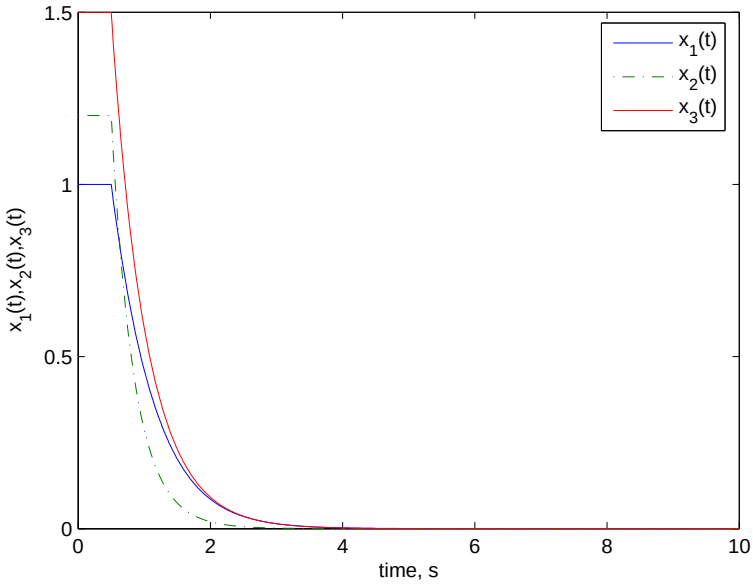
$$u(t) = -\frac{1}{2}B^{\mathsf{T}}P^{-1}x(t) = [-0.1372 \quad 0.0661 \quad 0.0810]x(t)$$

Hơn nữa, nghiệm $x(t, \varphi)$ của hệ thỏa mãn

$$\|x(t,\varphi)\| \leqslant 3.3950\|\varphi\|_{C^1}e^{-0.1t} \ \ \forall t \geqslant 0.$$

Hình 2.1 minh họa nghiệm đáp ứng với điều kiện ban đầu

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1.2 & 1.5 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \quad \forall t \in [-0.5, 0].$$



Hình 2.1: Nghiệm đáp ứng của hệ đóng

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Trong chương này, bằng cách xây dựng các phiếm hàm Lyapunov–Krasovskii mới, mà chủ yếu dựa trên thông tin về cận trên và cận dưới của hàm trễ, kết hợp với công thức Newton–Leibniz, bất đẳng thức Jensen cùng kỹ thuật LMI, chúng tôi đã thiết kế được một hàm điều khiển phản hồi giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho lớp hệ nơ-ron có trễ biến thiên hỗn hợp, trong đó yếu tố trễ rời rạc được giả thiết là một hàm liên tục theo thời gian (không đòi hỏi tính khả vi), nhận giá trị trong một khoảng và hiện diện ở cả hàm trạng thái và hàm quan sát. Điều kiện nhận được có dạng phụ thuộc trễ và có thể được kiểm tra một cách dễ dàng bằng cách sử dụng hộp công cụ điều khiển LMI của MATLAB.

Chương 3

BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN $\mathcal{H}_\infty$ TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN CHO LỚP HỆ RỜI RẠC TUYẾN TÍNH CÓ TRỄ BIẾN THIÊN THEO THỜI GIAN DẠNG KHOẢNG

Chương này nhằm trình bày các điều kiện đủ giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng, đây cũng là kết quả thứ hai mà chúng tôi nhận được trong quá trình thực hiện đề tài. Nội dung của chương được trích từ bài báo [2] trong danh mục các công trình đã công bố của tác giả có liên quan đến luận án.

3.1. KHÁI NIỆM ỔN ĐỊNH TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN

Khái niệm ổn định trong thời gian hữu hạn (FTS) được khởi xướng từ nửa đầu của những năm 1950, khi nó lần đầu tiên được giới thiệu trong các tài liệu tiếng Nga [5, 26]. Gần một thập kỷ sau đó, khái niệm này cũng xuất hiện trong các tạp chí phương Tây. Nói nôm na, một hệ được nói là ổn định trong thời gian hữu hạn nếu, cho trước một cận trên điều kiện ban đầu, trạng thái của nó không vượt quá một ngưỡng nhất định trong suốt một khoảng thời gian đã định. Chính xác hơn, với hệ:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.1}$$

trong đó $x(t) \in \mathbb{R}^n$, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 3.1 ([5])**.** Cho trước một thời điểm ban đầu t_0, một vô hướng $T > 0$ và các tập X_0, X_t. Hệ (3.1) được gọi là ổn định trong thời gian hữu hạn

ứng với (t_0, T, X_0, X_t) nếu

$$x_0 \in X_0 \quad \Longrightarrow \quad x(t) \in X_t \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T], \tag{3.2}$$

ở đây $x(t)$ ký hiệu nghiệm của hệ (3.1) xuất phát từ x_0 tại thời điểm t_0.

Các tập X_0 (tập/miền ban đầu) và X_t (tập/miền quỹ đạo) sẽ là các ellipsoid khi các hàm Lyapunov toàn phương được sử dụng, hoặc sẽ là các hình đa diện (polytope) khi các hàm Lyapunov toàn phương từng khúc được sử dụng. Lưu ý rằng tập quỹ đạo được phép thay đổi theo thời gian. Bởi tính đặt chỉnh của Định nghĩa 3.1, phải có $X_0 \subset X_{t_0}$. Tuy nhiên, nói chung, không bắt buộc rằng X_0 phải chứa trong X_t với $t > t_0$.

Để tìm hiểu tại sao tính chất được biểu thị bởi (3.2) lại được gọi là FTS, ta nhắc lại định nghĩa về tính ổn định Lyapunov (LS) cổ điển: nghiệm tầm thường của hệ (3.1) được nói là ổn định theo nghĩa Lyapunov nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ sao cho

$$\|x_0\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geqslant t_0.$$

Do đó, hệ là LS nếu, ngay khi một giá trị tùy ý cho ε được cố định, ta có thể xây dựng một quả cầu trong (có bán kính δ) sao cho *một khi điều kiện ban đầu x_0 thuộc quả cầu trong, quỹ đạo của hệ xuất phát từ x_0 không thoát khỏi quả cầu ngoài (có bán kính ε)*; hơn nữa, tính chất này đúng *với mọi t giữa t_0 và ∞*.

Trở lại Định nghĩa 3.1, chúng ta có một tập trong X_0 và một tập ngoài X_t, và bắt buộc rằng *một khi quỹ đạo xuất phát từ tập trong, nó không được thoát khỏi tập ngoài.* Cách nhìn này lý giải cho việc sử dụng thuật ngữ *tính ổn định*; tuy nhiên, khác với LS, điều này chỉ bắt buộc trên một *khoảng thời gian hữu hạn.*

Lưu ý rằng LS là một *khái niệm định tính* (tức là, cả quả cầu trong và quả cầu ngoài đều không được định lượng); do đó, LS có thể được coi là một

tính chất thuộc về cấu trúc: một hệ hoặc ổn định, hoặc không ổn định. Ngược lại, FTS là một *khái niệm định lượng*, vì các tập trong và ngoài được định rõ dứt khoát ngay từ đầu. Do đó, cùng một hệ có thể ổn định hữu hạn với cách chọn nào đó của X_0, X_t và T và không ổn định hữu hạn với một cách chọn khác của các tập và tham số này. Hệ quả là, *FTS và LS là những khái niệm độc lập*; thật vậy, một hệ có thể ổn định hữu hạn nhưng không ổn định theo nghĩa Lyapunov và ngược lại. Trong khi LS đề cập đến dáng điệu của hệ trong một *khoảng thời gian vô hạn*, FTS là một khái niệm thực hành hơn, hữu ích để nghiên cứu dáng điệu của hệ trong một *khoảng thời gian hữu hạn (có thể ngắn)*, và do đó nó tìm thấy ứng dụng bất cứ khi nào được yêu cầu rằng các biến trạng thái không được vượt quá một ngưỡng nhất định trong suốt một khoảng thời gian ngắn cho trước nào đó.

3.2. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

Bài toán thứ hai được đề cập trong luận án là bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên dạng khoảng:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + A_d x(k-h(k)) + Bu(k) + G\omega(k), \\ z(k) &= Cx(k) + C_d x(k-h(k)), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(k) &= \varphi(k), \quad k \in \{-h_2, -h_2+1, \ldots, 0\}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

ở đây $x(k) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $u(k) \in \mathbb{R}^m$ là biến điều khiển đầu vào; $z(k) \in \mathbb{R}^p$ là hàm quan sát đầu ra; $A, A_d \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, G \in \mathbb{R}^{n\times q}, C, C_d \in \mathbb{R}^{p\times n}$ là các ma trận hằng thực cho trước; $h(k)$ là hàm trễ thỏa mãn điều kiện

$$0 < h_1 \leqslant h(k) \leqslant h_2 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.4}$$

ở đây h_1, h_2 là các số nguyên dương cho trước; $\varphi(k)$ là hàm điều kiện ban đầu; $\omega(k) \in \mathbb{R}^q$ là biến nhiễu thỏa mãn điều kiện

$$\sum_{k=0}^{N} \omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k) < d, \tag{3.5}$$

với d là một số thực dương cho trước.

Định nghĩa 3.2. Cho trước các số dương $N, c_1, c_2, c_1 < c_2$ và một ma trận xác định dương đối xứng R, hệ (3.3) với $u(k) = 0$ được gọi là bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với (c_1, c_2, R, N) nếu

$$\max_{k\in\{-h_2,-h_2+1,\ldots,0\}} \varphi^{\mathsf{T}}(k)R\varphi(k) \leqslant c_1 \implies x^{\mathsf{T}}(k)Rx(k) < c_2 \quad \forall k = 1, 2, \ldots, N,$$

với mọi nhiễu $\omega(k)$ thỏa (3.5).

Định nghĩa 3.3. Cho trước các số dương $\gamma, N, c_1, c_2, c_1 < c_2$ và một ma trận xác định dương đối xứng R, hệ (3.3) với $u(k) = 0$ được gọi là $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với (c_1, c_2, R, N) nếu hai điều kiện sau đúng:

(i) Hệ (3.3) với $u(k) = 0$ là bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với (c_1, c_2, R, N).

(ii) Dưới điều kiện đầu bằng không (nghĩa là $\varphi(k) = 0\ \forall k \in \{-h_2, -h_2 + 1, \ldots, 0\}$), đầu ra $z(k)$ thỏa mãn

$$\sum_{k=0}^{N} z^{\mathsf{T}}(k)z(k) \leqslant \gamma \sum_{k=0}^{N} \omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k), \tag{3.6}$$

với mọi nhiễu $\omega(k)$ thỏa (3.5).

Định nghĩa 3.4. Cho trước các số dương $\gamma, N, c_1, c_2, c_1 < c_2$ và một ma trận xác định dương đối xứng R. Bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ (3.3) được gọi là giải được nếu tồn tại một hàm điều khiển phản hồi $u(k) = Kx(k)$ sao cho hệ đóng thu được là $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với (c_1, c_2, R, N).

3.3. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Trước hết là một kết quả về tính $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ (3.3) với $u(k) = 0$, mà được phát biểu một cách chính xác như sau:

Định lý 3.1. *Cho trước các số dương γ, N, c_1, c_2 với $c_1 < c_2$ và một ma trận xác định dương đối xứng R. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (3.3) thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại các ma trận xác định dương đối xứng P, Q, các vô hướng dương $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ và một số thực $\delta \geqslant 1$ sao cho các bất đẳng thức ma trận sau đúng:*

$$\lambda_1 R < P < \lambda_2 R, \quad Q < \lambda_3 R, \tag{3.7}$$

$$\begin{bmatrix} -\delta P + (h_2 - h_1 + 1)Q & 0 & 0 & A^\mathsf{T} P & C^\mathsf{T} \\ * & -\delta^{h_1} Q & 0 & A_d^\mathsf{T} P & C_d^\mathsf{T} \\ * & * & -\frac{\gamma}{\delta^N} I & G^\mathsf{T} P & 0 \\ * & * & * & -P & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{3.8}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma d - c_2 \delta \lambda_1 & c_1 \delta^{N+1} \lambda_2 & \rho \lambda_3 \\ * & -c_1 \delta^{N+1} \lambda_2 & 0 \\ * & * & -\rho \lambda_3 \end{bmatrix} < 0. \tag{3.9}$$

Khi đó hệ (3.3) với $u(k) = 0$ là $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với (c_1, c_2, R, N). Ở đây $\rho := c_1 \delta^{N+h_2-1} \Big[h_2 \delta + \frac{h_2(h_2-1) - h_1(h_1-1)}{2} \Big]$.

Chứng minh. Xét hàm toàn phương không âm sau đây:

$$V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k),$$

trong đó

$$V_1(k) = x^\mathsf{T}(k) P x(k),$$

$$V_2(k) = \sum_{s=k-h(k)}^{k-1} \delta^{k-1-s} x^\mathsf{T}(s) Q x(s)$$

$$V_3(k) = \sum_{s=-h_2+2}^{-h_1+1} \sum_{t=k-1+s}^{k-1} \delta^{k-1-t} x^{\mathsf{T}}(t) Q x(t).$$

Lấy biến thể sai phân của $V_i(k), i = 1, 2, 3$, ta có

$$\begin{aligned}
&V_1(k+1) - \delta V_1(k) \\
&= x^{\mathsf{T}}(k+1) P x(k+1) - \delta x^{\mathsf{T}}(k) P x(k) \\
&= \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-h(k)) \\ \omega(k) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} A^{\mathsf{T}} \\ A_d^{\mathsf{T}} \\ G^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A & A_d & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-h(k)) \\ \omega(k) \end{bmatrix} - \delta x^{\mathsf{T}}(k) P x(k), \\
&(V_2 + V_3)(k+1) - \delta (V_2 + V_3)(k) \\
&= \sum_{s=k+1-h(k+1)}^{k} \delta^{k-s} x^{\mathsf{T}}(s) Q x(s) - \sum_{s=k-h(k)}^{k-1} \delta^{k-s} x^{\mathsf{T}}(s) Q x(s) \\
&\quad + \sum_{s=-h_2+2}^{-h_1+1} \sum_{t=k+s}^{k} \delta^{k-t} x^{\mathsf{T}}(t) Q x(t) - \sum_{s=-h_2+2}^{-h_1+1} \sum_{t=k-1+s}^{k-1} \delta^{k-t} x^{\mathsf{T}}(t) Q x(t) \\
&= x^{\mathsf{T}}(k) Q x(k) + \sum_{s=k-h_1+1}^{k-1} \delta^{k-s} x^{\mathsf{T}}(s) Q x(s) + \sum_{s=k+1-h(k+1)}^{k-h_1} \delta^{k-s} x^{\mathsf{T}}(s) Q x(s) \\
&\quad - \sum_{s=k-h(k)+1}^{k-1} \delta^{k-s} x^{\mathsf{T}}(s) Q x(s) - \delta^{h(k)} x^{\mathsf{T}}(k-h(k)) Q x(k-h(k)) \\
&\quad + \sum_{s=-h_2+2}^{-h_1+1} \Bigg[x^{\mathsf{T}}(k) Q x(k) + \sum_{t=k+s}^{k-1} \delta^{k-t} x^{\mathsf{T}}(t) Q x(t) - \sum_{t=k+s}^{k-1} \delta^{k-t} x^{\mathsf{T}}(t) Q x(t) \\
&\qquad\qquad - \delta^{1-s} x^{\mathsf{T}}(k-1+s) Q x(k-1+s) \Bigg] \\
&= x^{\mathsf{T}}(k) Q x(k) + \sum_{s=k-h_1+1}^{k-1} \delta^{k-s} x^{\mathsf{T}}(s) Q x(s) - \sum_{s=k-h(k)+1}^{k-1} \delta^{k-s} x^{\mathsf{T}}(s) Q x(s) \\
&\quad + \sum_{s=k+1-h(k+1)}^{k-h_1} \delta^{k-s} x^{\mathsf{T}}(s) Q x(s) - \delta^{h(k)} x^{\mathsf{T}}(k-h(k)) Q x(k-h(k)) \\
&\quad + \sum_{s=-h_2+2}^{-h_1+1} \left[x^{\mathsf{T}}(k) Q x(k) - \delta^{1-s} x^{\mathsf{T}}(k-1+s) Q x(k-1+s) \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant x^{\mathsf{T}}(k)Qx(k) + \sum_{s=k+1-h(k+1)}^{k-h_1} \delta^{k-s} x^{\mathsf{T}}(s)Qx(s) \\
&\quad - \delta^{h(k)} x^{\mathsf{T}}(k-h(k))Qx(k-h(k)) + (h_2-h_1)x^{\mathsf{T}}(k)Qx(k) \\
&\quad - \sum_{s=-h_2+2}^{-h_1+1} \delta^{1-s} x^{\mathsf{T}}(k-1+s)Qx(k-1+s) \\
&\leqslant (h_2-h_1+1)x^{\mathsf{T}}(k)Qx(k) - \delta^{h_1} x^{\mathsf{T}}(k-h(k))Qx(k-h(k)) \\
&\quad + \sum_{s=k+1-h(k+1)}^{k-h_1} \delta^{k-s} x^{\mathsf{T}}(s)Qx(s) - \sum_{s=k+1-h_2}^{k-h_1} \delta^{k-s} x^{\mathsf{T}}(s)Qx(s) \\
&\leqslant (h_2-h_1+1)x^{\mathsf{T}}(k)Qx(k) - \delta^{h_1} x^{\mathsf{T}}(k-h(k))Qx(k-h(k)).
\end{aligned}
$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
&V(k+1) - \delta V(k) \\
&\leqslant \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-h(k)) \\ \omega(k) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} A^{\mathsf{T}} \\ A_d^{\mathsf{T}} \\ G^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A & A_d & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-h(k)) \\ \omega(k) \end{bmatrix} \\
&\quad + x^{\mathsf{T}}(k)\big[-\delta P + (h_2-h_1+1)Q\big]x(k) - \delta^{h_1} x^{\mathsf{T}}(k-h(k))Qx(k-h(k)) \\
&\quad + z^{\mathsf{T}}(k)z(k) - \frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k) + \frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k) - z^{\mathsf{T}}(k)z(k).
\end{aligned}
$$

Nhận xét rằng bằng cách đặt

$$
\begin{aligned}
\xi(k) &:= \begin{bmatrix} x^{\mathsf{T}}(k) & x^{\mathsf{T}}(k-h(k)) & \omega^{\mathsf{T}}(k) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \\
\Upsilon &:= \begin{bmatrix} PA & PA_d & PG \end{bmatrix}, \\
\Phi &:= \begin{bmatrix} -\delta P + (h_2-h_1+1)Q + C^{\mathsf{T}}C & C^{\mathsf{T}}C_d & 0 \\ * & -\delta^{h_1}Q + C_d^{\mathsf{T}}C_d & 0 \\ * & * & -\frac{\gamma}{\delta^N}I \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

ta thấy ngay

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-h(k)) \\ \omega(k) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} A^{\mathsf{T}} \\ A_d^{\mathsf{T}} \\ G^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A & A_d & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-h(k)) \\ \omega(k) \end{bmatrix} = \xi^{\mathsf{T}}(k)\Upsilon^{\mathsf{T}}P^{-1}\Upsilon\xi(k)$$

và

$$\begin{aligned}
& x^{\mathsf{T}}(k)\big[-\delta P + (h_2 - h_1 + 1)Q\big]x(k) - \delta^{h_1}x^{\mathsf{T}}(k-h(k))Qx(k-h(k)) \\
& + z^{\mathsf{T}}(k)z(k) - \frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k) \\
= {} & x^{\mathsf{T}}(k)\big[-\delta P + (h_2 - h_1 + 1)Q + C^{\mathsf{T}}C\big]x(k) + 2x^{\mathsf{T}}(k)C^{\mathsf{T}}C_d x(k-h(k)) \\
& + x^{\mathsf{T}}(k-h(k))\big[-\delta^{h_1}Q + C_d^{\mathsf{T}}C_d\big]x(k-h(k)) - \frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k) \\
= {} & \xi^{\mathsf{T}}(k)\Phi\xi(k).
\end{aligned}$$

Vì thế, ta viết gọn được

$$V(k+1) - \delta V(k) \leqslant \xi^{\mathsf{T}}(k)\left[\Phi + \Upsilon^{\mathsf{T}}P^{-1}\Upsilon\right]\xi(k) + \frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k) - z^{\mathsf{T}}(k)z(k). \tag{3.10}$$

Tiếp theo, bởi Bổ đề 1.1, ta thấy

$$\begin{aligned}
& \Phi + \Upsilon^{\mathsf{T}}P^{-1}\Upsilon < 0 \\
\Longleftrightarrow & \begin{bmatrix} -\delta P + (h_2 - h_1 + 1)Q + C^{\mathsf{T}}C & C^{\mathsf{T}}C_d & 0 & A^{\mathsf{T}}P \\ * & -\delta^{h_1}Q + C_d^{\mathsf{T}}C_d & 0 & A_d^{\mathsf{T}}P \\ * & * & -\frac{\gamma}{\delta^N}I & G^{\mathsf{T}}P \\ * & * & * & -P \end{bmatrix} < 0
\end{aligned}$$

hay

$$\begin{bmatrix} -\delta P + (h_2 - h_1 + 1)Q & 0 & 0 & A^{\mathsf{T}}P \\ * & -\delta^{h_1}Q & 0 & A_d^{\mathsf{T}}P \\ * & * & -\frac{\gamma}{\delta^N}I & G^{\mathsf{T}}P \\ * & * & * & -P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^{\mathsf{T}} \\ C_d^{\mathsf{T}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & C_d & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0,$$

mà hiển nhiên là tương đương với bất đẳng thức (3.8). Vì lý do này, từ (3.10) suy ra rằng

$$V(k+1) - \delta V(k) \leqslant \frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k) \ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Ước lượng này có thể được viết lại như sau

$$V(k) \leqslant \delta V(k-1) + \frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(k-1)\omega(k-1) \ \ \forall k = 1, 2, \ldots \tag{3.11}$$

Bởi phép lặp, và để ý đến giả thiết (3.5), bất đẳng thức (3.11) cho ta

$$\begin{aligned} V(k) &\leqslant \delta^k V(0) + \frac{\gamma}{\delta^N}\sum_{s=0}^{k-1}\delta^{k-1-s}\omega^{\mathsf{T}}(s)\omega(s) \\ &\leqslant \delta^N V(0) + \frac{\gamma}{\delta^N}\delta^{N-1}\sum_{s=0}^{N-1}\omega^{\mathsf{T}}(s)\omega(s) \\ &< \delta^N V(0) + \frac{\gamma}{\delta}d. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Bây giờ, bởi (3.7) và điều kiện ban đầu $x(k) = \varphi(k)\ \forall k \in \{-h_2, -h_2+1, \ldots, 0\}$, hiển nhiên rằng

$$\begin{aligned} V(0) &= x^{\mathsf{T}}(0)Px(0) + \sum_{s=-h(0)}^{-1}\delta^{-1-s}x^{\mathsf{T}}(s)Qx(s) \\ &\quad + \sum_{s=-h_2+2}^{-h_1+1}\sum_{t=-1+s}^{-1}\delta^{-1-t}x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) \\ &< \lambda_2 x^{\mathsf{T}}(0)Rx(0) + \lambda_3\delta^{h_2-1}\sum_{s=-h_2}^{-1}x^{\mathsf{T}}(s)Rx(s) \\ &\quad + \lambda_3\delta^{h_2-2}\sum_{s=-h_2+2}^{-h_1+1}\sum_{t=-1+s}^{-1}x^{\mathsf{T}}(t)Rx(t) \\ &\leqslant \Big[\lambda_2 + \lambda_3 h_2\delta^{h_2-1} + \lambda_3\frac{h_2(h_2-1) - h_1(h_1-1)}{2}\delta^{h_2-2}\Big]c_1. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Từ (3.12) và (3.13), ta được

$$V(k) < \delta^N\sigma + \frac{\gamma}{\delta}d \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.14}$$

ở đây $\sigma := \Big[\lambda_2 + \lambda_3 h_2 \delta^{h_2-1} + \lambda_3 \frac{h_2(h_2-1)-h_1(h_1-1)}{2}\delta^{h_2-2}\Big]c_1$. Mặt khác, cũng từ (3.7) suy ra

$$V(k) \geqslant x^{\mathsf{T}}(k)Px(k) > \lambda_1 x^{\mathsf{T}}(k)Rx(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.15}$$

Nhận xét rằng bởi Bổ đề 1.1, bất đẳng thức (3.9) tương đương với

$$\begin{aligned}
&\gamma d - c_2\delta\lambda_1 + \begin{bmatrix} c_1\delta^{N+1}\lambda_2 & \rho\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\delta^{N+1}\lambda_2 & 0 \\ 0 & \rho\lambda_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_1\delta^{N+1}\lambda_2 \\ \rho\lambda_3 \end{bmatrix} < 0 \\
\iff &\gamma d - c_2\delta\lambda_1 + \begin{bmatrix} c_1\delta^{N+1}\lambda_2 & \rho\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (c_1\delta^{N+1}\lambda_2)^{-1} & 0 \\ 0 & (\rho\lambda_3)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\delta^{N+1}\lambda_2 \\ \rho\lambda_3 \end{bmatrix} < 0 \\
\iff &\gamma d - c_2\delta\lambda_1 + c_1\delta^{N+1}\lambda_2 + \rho\lambda_3 < 0 \\
\iff &\gamma d - c_2\delta\lambda_1 + c_1\delta^{N+1}\lambda_2 + c_1\delta^{N+h_2-1}\Big[h_2\delta + \tfrac{h_2(h_2-1)-h_1(h_1-1)}{2}\Big]\lambda_3 < 0 \\
\iff &\delta^{N+1}\sigma + \gamma d - c_2\delta\lambda_1 < 0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Vì vậy, từ (3.14), (3.15) và (3.16) ta nhận được:

$$x^{\mathsf{T}}(k)Rx(k) < \frac{1}{\lambda_1\delta}\Big[\delta^{N+1}\sigma + \gamma d\Big] < c_2,$$

tức hệ đang xét là bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với (c_1, c_2, R, N). Để hoàn tất chứng minh của định lý, ta còn phải chứng tỏ điều kiện mức γ hữu hạn (3.6) đúng. Với mục đích đó, từ (3.10) suy ra

$$V(k+1) \leqslant \delta V(k) + \frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k) - z^{\mathsf{T}}(k)z(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+,$$

và bởi phép lặp, ta có

$$0 \leqslant V(k) \leqslant \delta^k V(0) + \sum_{s=0}^{k-1} \delta^{k-1-s}\Big[\frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(s)\omega(s) - z^{\mathsf{T}}(s)z(s)\Big]. \tag{3.17}$$

Dưới điều kiện đầu bằng không, dễ thấy $V(0) = 0$ do đó (3.17) cho ta

$$\sum_{s=0}^{k-1} \delta^{k-1-s} z^{\mathsf{T}}(s)z(s) \;\leqslant\; \sum_{s=0}^{k-1} \delta^{k-1-s}\frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(s)\omega(s).$$

Từ đó, với $k = N + 1$, ta có

$$\sum_{s=0}^{N} \delta^{N-s} z^{\mathsf{T}}(s) z(s) \ \leqslant \ \gamma \sum_{s=0}^{N} \frac{\delta^{N-s}}{\delta^{N}} \omega^{\mathsf{T}}(s) \omega(s). \tag{3.18}$$

Vì $1 \leqslant \delta^{N-s} \leqslant \delta^{N} \ \forall s \in \{0, 1, \ldots, N\}$ nên (3.18) kéo theo

$$\sum_{s=0}^{N} z^{\mathsf{T}}(s) z(s) \ \leqslant \ \gamma \sum_{s=0}^{N} \omega^{\mathsf{T}}(s) \omega(s),$$

nghĩa là, điều kiện (3.6) được chứng minh. Định lý được chứng minh hoàn toàn. □

Tiếp theo, chúng tôi sẽ giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ (3.3) bằng cách thiết kế một hàm điều khiển phản hồi $u(k) = Kx(k)$ sao cho hệ đóng thu được

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A + BK)x(k) + A_d x(k - h(k)) + G\omega(k), \\ z(k) &= Cx(k) + C_d x(k - h(k)), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(k) &= \varphi(k), \ k \in \{-h_2, -h_2 + 1, \ldots, 0\}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

là $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn.

Định lý 3.2. *Cho trước các số dương γ, N, c_1, c_2 với $c_1 < c_2$ và một ma trận xác định dương đối xứng R. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (3.3) thỏa mãn điều kiện: tồn tại các ma trận xác định dương đối xứng U, V, W_1, W_2, W_3, một ma trận Y và một số thực $\delta \geqslant 1$ sao cho các bất đẳng thức ma trận sau đúng:*

$$U < W_2, \quad V < W_3, \tag{3.20}$$

$$\begin{bmatrix} -\delta U + (h_2 - h_1 + 1)V & 0 & 0 & UA^\mathsf{T} + Y^\mathsf{T}B^\mathsf{T} & UC^\mathsf{T} \\ * & -\delta^{h_1}V & 0 & UA_d^\mathsf{T} & UC_d^\mathsf{T} \\ * & * & -\frac{\gamma}{\delta^N}I & G^\mathsf{T} & 0 \\ * & * & * & -U & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{3.21}$$

$$\begin{bmatrix} -W_1 & c_1\delta^{N+1}W_2 & \rho W_3 \\ * & -c_1\delta^{N+1}W_2 & 0 \\ * & * & -\rho W_3 \end{bmatrix} < 0, \tag{3.22}$$

$$\begin{bmatrix} W_1 - c_2\delta U & \gamma dUR \\ * & -\gamma dR \end{bmatrix} < 0. \tag{3.23}$$

Khi đó, bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ (3.3) là giải được. Hơn nữa, hàm điều khiển phản hồi được cho bởi

$$u(k) = YU^{-1}x(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Chứng minh. Hiển nhiên rằng, theo Định lý 3.1, hệ (3.19) là $\mathcal{H}_\infty$−bị chặn trong thời gian hữu hạn nếu tồn tại các ma trận xác định dương đối xứng P, Q, các vô hướng dương $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ và một số thực $\delta \geqslant 1$ sao cho các bất đẳng thức (3.7)-(3.9) đúng, trong đó ma trận $A + BK$ sẽ thế chỗ của ma trận A. Nói cách khác, tương ứng với (3.8), ta có

$$\begin{bmatrix} -\delta P + (h_2 - h_1 + 1)Q & 0 & 0 & (A + BK)^\mathsf{T}P & C^\mathsf{T} \\ * & -\delta^{h_1}Q & 0 & A_d^\mathsf{T}P & C_d^\mathsf{T} \\ * & * & -\frac{\gamma}{\delta^N}I & G^\mathsf{T}P & 0 \\ * & * & * & -P & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{3.24}$$

Nhân phía trước và phía sau (3.24) bởi ma trận $\mathrm{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, I, P^{-1}, I\} > 0$

ta đi đến

$$\begin{bmatrix} -\delta P^{-1} + (h_2 - h_1 + 1)P^{-1}QP^{-1} & 0 & 0 & P^{-1}(A+BK)^{\mathsf{T}}P^{-1}C^{\mathsf{T}} \\ * & -\delta^{h_1}P^{-1}QP^{-1} & 0 & P^{-1}A_d^{\mathsf{T}} & P^{-1}C_d^{\mathsf{T}} \\ * & * & -\frac{\gamma}{\delta^N}I & G^{\mathsf{T}} & 0 \\ * & * & * & -P^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{3.25}$$

Qua phép đổi biến: $U = P^{-1},\ V = P^{-1}QP^{-1}$, (3.25) trở thành

$$\begin{bmatrix} -\delta U + (h_2 - h_1 + 1)V & 0 & 0 & U(A+BK)^{\mathsf{T}} & UC^{\mathsf{T}} \\ * & -\delta^{h_1}V & 0 & UA_d^{\mathsf{T}} & UC_d^{\mathsf{T}} \\ * & * & -\frac{\gamma}{\delta^N}I & G^{\mathsf{T}} & 0 \\ * & * & * & -U & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0.$$

Tiếp tục, bằng cách đặt $Y^{\mathsf{T}} = UK^{\mathsf{T}},\ K = YU^{-1}$, ta được ngay bất đẳng thức (3.21). Để nhận được (3.22), lưu ý rằng bất đẳng thức (3.9) có thể được coi như

$$\begin{bmatrix} (\gamma d - c_2\delta\lambda_1)I & c_1\delta^{N+1}\lambda_2 I & \rho\lambda_3 I \\ * & -c_1\delta^{N+1}\lambda_2 I & 0 \\ * & * & -\rho\lambda_3 I \end{bmatrix} < 0. \tag{3.26}$$

Nhân phía sau (3.26) bởi ma trận $\mathrm{diag}\{R, R, R\} > 0$ ta được

$$\begin{bmatrix} \gamma dR - c_2\delta\lambda_1 R & c_1\delta^{N+1}\lambda_2 R & \rho\lambda_3 R \\ * & -c_1\delta^{N+1}\lambda_2 R & 0 \\ * & * & -\rho\lambda_3 R \end{bmatrix} < 0. \tag{3.27}$$

Tiếp theo, nhân phía trước và phía sau (3.27) bởi ma trận $\mathrm{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}\}$ > 0, ta đi đến

$$\begin{bmatrix} \gamma dP^{-1}RP^{-1} - c_2\delta P^{-1}(\lambda_1 R)P^{-1} & c_1\delta^{N+1}P^{-1}(\lambda_2 R)P^{-1} & \rho P^{-1}(\lambda_3 R)P^{-1} \\ * & -c_1\delta^{N+1}P^{-1}(\lambda_2 R)P^{-1} & 0 \\ * & * & -\rho P^{-1}(\lambda_3 R)P^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{3.28}$$

rồi đặt các biến mới

$$W_1 = -\gamma d P^{-1} R P^{-1} + c_2 \delta P^{-1}(\lambda_1 R) P^{-1},$$
$$W_2 = P^{-1}(\lambda_2 R) P^{-1}, \quad W_3 = P^{-1}(\lambda_3 R) P^{-1},$$

(3.28) sẽ trở thành (3.22) như mong muốn. Để nhận được (3.20), ta chỉ việc nhân phía trước và phía sau (3.7) bởi ma trận P^{-1}. Cuối cùng, để ý rằng

$$W_1 = -\gamma d P^{-1} R P^{-1} + c_2 \delta P^{-1}(\lambda_1 R) P^{-1} < -\gamma d U R U + c_2 \delta U,$$

ta nhận được

$$W_1 - c_2 \delta U + \gamma d U R [\gamma d R]^{-1} \gamma d R U < 0,$$

mà rõ ràng tương đương với (3.23) bởi Bổ đề 1.1. Định lý đã được chứng minh xong. □

Nhận xét 3.1. Như trong các công trình [65, 66], để chứng minh Định lý 3.1 (và sau đó là Định lý 3.2), chúng tôi đã tìm cách xây dựng một bộ các phiếm hàm kiểu Lyapunov–Krasovskii mới trong đó có sự tham gia của các hệ số δ^{k-1-s} và δ^{k-1-t}. Bằng cách đó, chúng tôi đã tránh được việc phải biến đổi hệ gốc thành hai hệ con liên kết như các tác giả đã tiến hành trong [63] mà các điều kiện thu được (3.7)-(3.9) của Định lý 3.1 và (3.20)-(3.23) của Định lý 3.2 vẫn có dạng bất đẳng thức ma trận như trong [63]. Ở đây, tham số δ đóng vai trò như một tham số hiệu chỉnh và (3.8)-(3.9), (3.21)-(3.23) sẽ trở thành các LMI khi ta cố định tham số δ này lại, do đó chúng có thể được lập trình và tính toán một cách dễ dàng bằng hộp công cụ LMI trong MATLAB [16]. Đây cũng là một ưu điểm đáng ghi nhận của hai định lý này của chúng tôi khi so sánh với: các điều kiện (29), (39) trong [50], các điều kiện (45), (56) trong [65] và điều kiện (5) trong [66].

Nhận xét 3.2. Trong các bài báo [22, 33, 50, 58], các ẩn số bổ sung và các ma trận trọng số tự do được đưa vào để tạo tính linh hoạt trong việc giải các

LMI thu được. Tuy nhiên, quá nhiều ẩn số và ma trận trọng số tự do được sử dụng trong các phương pháp hiện có khiến cho việc phân tích hệ thống trở nên phức tạp và làm tăng đáng kể nhu cầu tính toán. So với phương pháp ma trận tự do được sử dụng trong các công trình trên, phương pháp của chúng tôi sử dụng ít biến hơn, chẳng hạn, bất đẳng thức ma trận (3.8) không có ma trận tự do nào, bất đẳng thức ma trận (3.21) chỉ có một ma trận trọng số tự do. Vì thế, các điều kiện mà chúng tôi đề xuất ít bảo thủ hơn so với các công trình nêu trên. Tính hữu hiệu của các kết quả này sẽ được minh họa rõ nét bởi các ví dụ được trình bày trong mục còn lại của chương.

3.4. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 3.1. Xét hệ rời rạc tuyến tính có trễ (3.3) với $u(k) = 0$ và các tham số của nó được cho bởi

$$A = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} -0.12 & 0.1 \\ 0.15 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.25 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 \\ -0.15 & 0.15 \end{bmatrix}, \quad C_d = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.25 \\ 0.2 & -0.15 \end{bmatrix}, \quad R = I,$$

$$h(k) = 2 + 8\sin^2 \tfrac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Nhận xét rằng hàm trễ $h(k)$ là biến thiên theo thời gian và $h_1 = 2$, $h_2 = 10$. Với $N = 200$, $d = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 7$ và $\gamma = 1$, bằng cách sử dụng hộp công cụ điều khiển LMI trong MATLAB, các bất đẳng thức ma trận (3.7)-(3.9) là giải được với $\delta = 1.0001$ và

$$P = \begin{bmatrix} 2.1225 & 0.0261 \\ 0.0261 & 2.0246 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.1901 & -0.0194 \\ -0.0194 & 0.1548 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = 2.0180, \quad \lambda_2 = 2.1292, \quad \lambda_3 = 0.1987.$$

Bởi Định lý 3.1, hệ đang xét là $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với

$(1, 7, I, 200)$.

Ví dụ 3.2. Xét hệ (3.3) với:

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.15 \\ 0.15 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad C_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.15 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.3 \end{bmatrix},$$

$$h(k) = 2 + 10\cos^2 \tfrac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Với $h_1 = 2,\ h_2 = 12,\ N = 140,\ d = 1,\ c_1 = 2,\ c_2 = 16$ và $\gamma = 1$, các bất đẳng thức ma trận (3.20)-(3.23) là giải được với $\delta = 1.00027$ và

$$U = \begin{bmatrix} 0.2836 & 0.1250 \\ 0.1250 & 0.3413 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0.0217 & 0.0118 \\ 0.0118 & 0.0274 \end{bmatrix},$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 4.3514 & 1.9538 \\ 1.9538 & 5.2522 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0.3417 & 0.0824 \\ 0.0824 & 0.3739 \end{bmatrix},$$

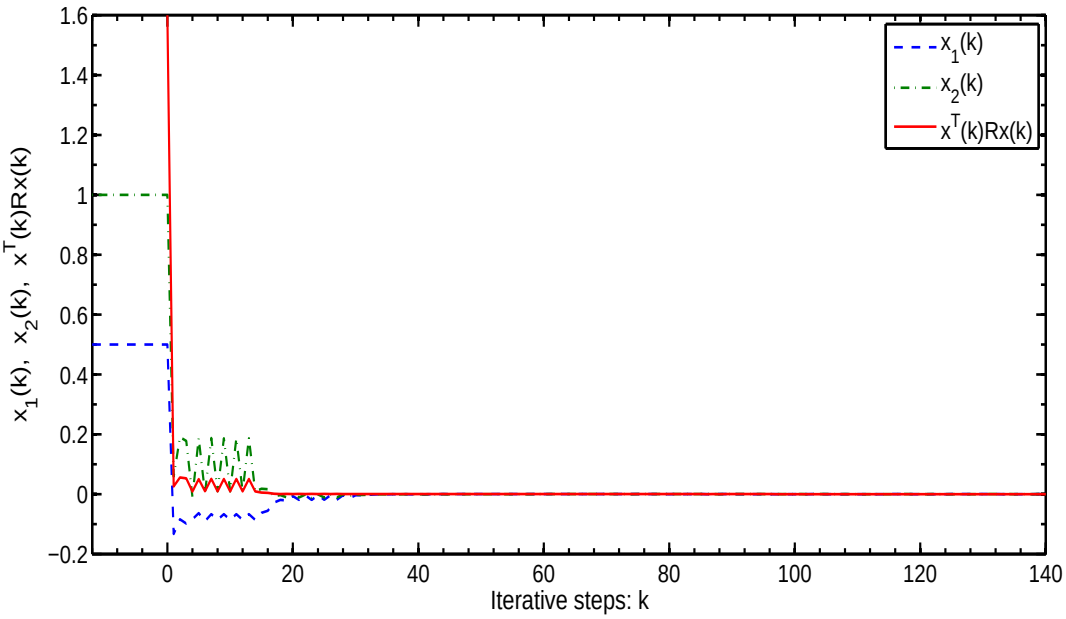
$$W_3 = \begin{bmatrix} 0.0222 & 0.0114 \\ 0.0114 & 0.0276 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -0.9638 & -1.2080 \end{bmatrix}.$$

Bởi Định lý 3.2, bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ (3.3) là giải được với hàm điều khiển phản hồi được cho bởi

$$u(k) = \begin{bmatrix} -2.1922 & -2.7365 \end{bmatrix} x(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Hình 3.1 minh họa nghiệm đáp ứng với điều kiện ban đầu

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad \forall k \in \{-12, -11, \ldots, 0\}.$$



Hình 3.1: Nghiệm đáp ứng của hệ đóng với $n = 2$

Ví dụ 3.3. Xét hệ rời rạc tuyến tính có trễ (3.3) với các tham số của nó được cho bởi:

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.15 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.1 & 0.15 \\ 0.4 & 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.15 & 0.2 & -0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.15 & -0.12 \\ -0.12 & 0.15 & 0.1 & -0.1 \\ -0.12 & -0.15 & 0.25 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.12 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.15 \\ 0.1 \\ 0.12 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.12 & 0.12 & 0.15 \end{bmatrix},$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.15 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad R = \mathrm{diag}\{1.2, 1.3, 1.4, 1.5\},$$

$$h(k) = 2 + 10\sin^2 \tfrac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Với $h_1 = 2,\ h_2 = 12,\ N = 120,\ d = 1,\ c_1 = 2,\ c_2 = 17$ và $\gamma = 1$, các bất đẳng thức ma trận (3.20)-(3.23) là giải được với $\delta = 1.0001$ và

$$U = \begin{bmatrix} 0.0522 & 0.0641 & 0.0306 & 0.0281 \\ 0.0641 & 0.1798 & 0.1133 & 0.0194 \\ 0.0306 & 0.1133 & 0.1032 & 0.0137 \\ 0.0281 & 0.0194 & 0.0137 & 0.0923 \end{bmatrix},\ V = \begin{bmatrix} 0.0039 & 0.0057 & 0.0026 & 0.0014 \\ 0.0057 & 0.0158 & 0.0096 & 0.0011 \\ 0.0026 & 0.0096 & 0.0078 & 0.0004 \\ 0.0014 & 0.0011 & 0.0004 & 0.0053 \end{bmatrix},$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.8468 & 1.0553 & 0.4992 & 0.4367 \\ 1.0553 & 2.9564 & 1.8506 & 0.2996 \\ 0.4992 & 1.8506 & 1.6661 & 0.2043 \\ 0.4367 & 0.2996 & 0.2043 & 1.4603 \end{bmatrix},\ W_2 = \begin{bmatrix} 0.0827 & 0.0714 & 0.0357 & 0.0669 \\ 0.0714 & 0.2034 & 0.1390 & 0.0394 \\ 0.0357 & 0.1390 & 0.1595 & 0.0404 \\ 0.0669 & 0.0394 & 0.0404 & 0.1949 \end{bmatrix},$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0.0041 & 0.0058 & 0.0027 & 0.0017 \\ 0.0058 & 0.0161 & 0.0099 & 0.0013 \\ 0.0027 & 0.0099 & 0.0082 & 0.0006 \\ 0.0017 & 0.0013 & 0.0006 & 0.0062 \end{bmatrix},$$

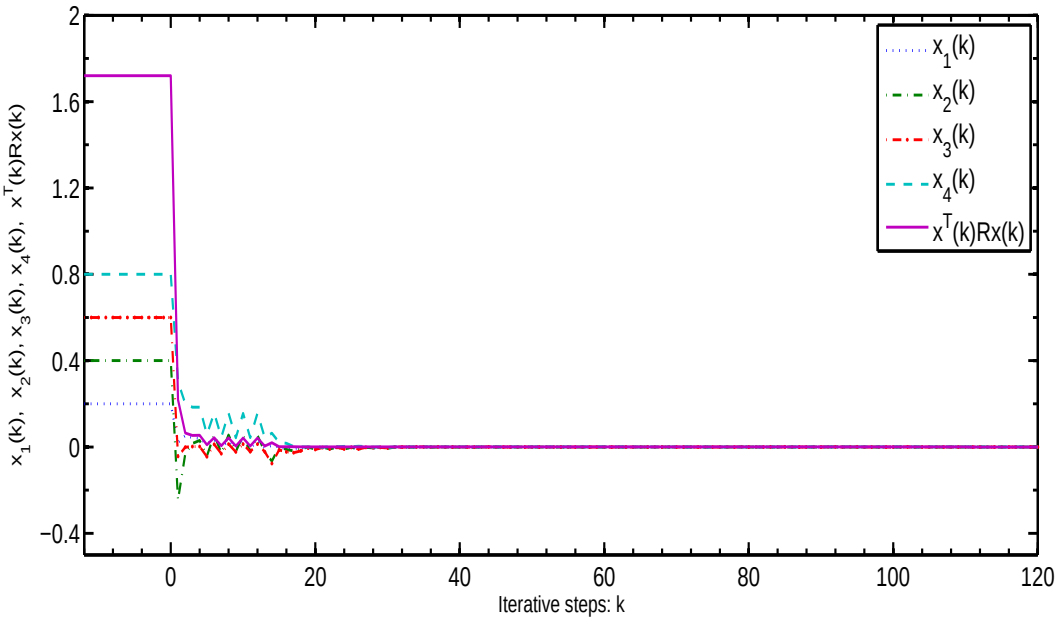
$$Y = \begin{bmatrix} -0.3028 & -0.6864 & -0.5084 & -0.2440 \end{bmatrix}.$$

Bởi Định lý 3.2, bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ (3.3) là giải được với hàm điều khiển phản hồi được cho bởi

$$u(k) = \begin{bmatrix} -1.9578 & -1.1305 & -2.9206 & -1.3762 \end{bmatrix} x(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Hình 3.2 minh họa nghiệm đáp ứng với điều kiện ban đầu

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \quad \forall k \in \{-12, -11, \ldots, 0\}.$$



Hình 3.2: Nghiệm đáp ứng của hệ đóng với $n = 4$

KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Trong chương này, bằng cách xây dựng các phiếm hàm kiểu Lyapunov–Krasovskii mới kết hợp với kỹ thuật bất đẳng thức ma trận tuyến tính, chúng tôi đã thu được một tiêu chuẩn giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng. Cụ thể, các kết quả đã đạt được gồm:

- Đưa ra các điều kiện đủ đảm bảo tính $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng.

- Trên cơ sở đó, thiết kế một hàm điều khiển phản hồi giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cũng cho chính lớp hệ nêu trên.

Các điều kiện đã đề xuất đều phụ thuộc trễ và có thể được kiểm tra một cách dễ dàng bằng cách sử dụng hộp công cụ điều khiển LMI của MATLAB.

Chương 4

BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN $\mathcal{H}_\infty$ TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN CHO LỚP HỆ NƠ-RON RỜI RẠC SUY BIẾN CÓ TRỄ BIẾN THIÊN THEO THỜI GIAN DẠNG KHOẢNG

Kết quả thứ ba của luận án sẽ được trình bày trong chương này. Cụ thể, chúng tôi sẽ đề cập đến các điều kiện đủ giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron rời rạc suy biến có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng. Nội dung chính của chương được trích từ bài báo [3] trong danh mục các công trình khoa học đã công bố của tác giả có liên quan đến luận án.

4.1. SƠ LƯỢC VỀ HỆ RỜI RẠC SUY BIẾN TUYẾN TÍNH

Xét hệ rời rạc suy biến tuyến tính với trễ hằng như sau

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= A_0x(k) + A_1x(k-\tau) + Bu(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(k) &= \varphi(k), \quad k \in \{-\tau, -\tau+1, \ldots, 0\}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

ở đây $x(k) \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái; $u(k) \in \mathbb{R}^m$ là biến điều khiển đầu vào; $E, A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ là các ma trận hằng thực cho trước, hơn nữa giả sử rằng ma trận E là suy biến với $\operatorname{rank}(E) = r < n$; $0 < \tau \in \mathbb{N}$ là trễ hằng; $\varphi(k)$ là hàm điều kiện ban đầu.

Nhận xét rằng nếu E là ma trận đơn vị thì hệ (4.1) trở thành hệ rời rạc tuyến tính có trễ thông thường và do đó nghiệm của nó sẽ thu được qua quá trình truy hồi liên tiếp. Khi ma trận E là suy biến thực sự, vấn đề tồn tại nghiệm sẽ không còn đơn giản như trên bởi sự hiện diện của các ràng buộc đại số. Đó cũng là mối quan tâm chính của chúng tôi trong mục này.

Định nghĩa 4.1 ([9]). Cặp ma trận (E, A_0) được gọi là chính quy nếu tồn tại một vô hướng $\lambda \in \mathbb{C}$ sao cho $\det(\lambda E - A_0) \neq 0$.

Nhận xét rằng nếu tồn tại một số phức λ để $\det(\lambda E - A_0) \neq 0$ thì cũng tồn tại vô hạn các số phức như vậy, chỉ trừ hữu hạn các giá trị là nghiệm của đa thức $\det(sE - A_0) = 0$.

Bổ đề sau cho ta một điều kiện cần và đủ cho tính chính quy của cặp ma trận (E, A_0).

Bổ đề 4.1 ([11]). *(E, A_0) là cặp ma trận chính quy khi và chỉ khi tồn tại hai ma trận khả nghịch P, Q sao cho*

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad PA_0Q = \begin{bmatrix} A_{01} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

trong đó $N \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ là ma trận lũy linh, $A_{01} \in \mathbb{R}^{r\times r}$.

Xét hệ (4.1) với cặp ma trận (E, A_0) thỏa mãn điều kiện chính quy. Khi đó, tồn tại hai ma trận không suy biến P, Q thỏa mãn bổ đề trên. Thực hiện phép đổi biến

$$Q^{-1}x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad x_1(k) \in \mathbb{R}^r, \quad x_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r}, \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$Q^{-1}\varphi(k) = \begin{bmatrix} \varphi_1(k) \\ \varphi_2(k) \end{bmatrix}, \quad k \in \{-\tau, -\tau+1, \ldots, 0\},$$

và đặt $PA_1Q = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{bmatrix}$, $PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, ta đưa được hệ (4.1) về dạng tương đương sau

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= A_{01}x_1(k) + A_{11}x_1(k-\tau) + A_{12}x_2(k-\tau) + B_1u(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ Nx_2(k+1) &= x_2(k) + A_{13}x_1(k-\tau) + A_{14}x_2(k-\tau) + B_2u(k), \\ x_1(k) &= \varphi_1(k), \quad x_2(k) = \varphi_2(k), \ k \in \{-\tau, -\tau+1, \ldots, 0\}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

trong đó $N \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ là ma trận lũy linh với chỉ số lũy linh h.

Nhận xét rằng hệ phương trình đầu trong (4.2) là một hệ rời rạc thông thường và do đó bởi phép truy hồi, dễ thấy rằng nghiệm của nó là

$$x_1(k) = A_{01}^k\, x_1(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A_{01}^{k-1-i}\big[A_{11}x_1(i-\tau) + A_{12}x_2(i-\tau) + B_1u(i)\big]. \quad (4.3)$$

Tiếp theo, nhân bên trái hai vế của hệ phương trình thứ hai trong (4.2) lần lượt với $N^0 = I$, N, $N^2, \ldots, N^{h-1}$, ta được

$$\begin{aligned}
x_2(k) &= Nx_2(k+1) - A_{13}x_1(k-\tau) - A_{14}x_2(k-\tau) - B_2u(k),\\
Nx_2(k+1) &= N^2x_2(k+2) - NA_{13}x_1(k+1-\tau)\\
&\qquad - NA_{14}x_2(k+1-\tau) - NB_2u(k+1),\\
N^2x_2(k+2) &= N^3x_2(k+3) - N^2A_{13}x_1(k+2-\tau)\\
&\qquad - N^2A_{14}x_2(k+2-\tau) - N^2B_2u(k+2),\\
&\vdots\\
N^{h-1}x_2(k+h-1) &= N^hx_2(k+h) - N^{h-1}A_{13}x_1(k+h-1-\tau)\\
&\qquad - N^{h-1}A_{14}x_2(k+h-1-\tau) - N^{h-1}B_2u(k+h-1).
\end{aligned}$$

Cộng các phương trình trên vế theo vế và để ý rằng $N^h = 0$ sẽ nhận được nghiệm của hệ con thứ hai

$$x_2(k) = -\sum_{i=0}^{h-1} N^i\big[A_{13}x_1(k+i-\tau) + A_{14}x_2(k+i-\tau) + B_2u(k+i)\big]. \quad (4.4)$$

Kết hợp (4.3) và (4.4), ta thu được nghiệm của hệ (4.2) như sau

$$\begin{aligned}
x(k) &= Q\begin{bmatrix} I_{r\times r}\\ 0_{(n-r)\times r}\end{bmatrix} x_1(k) + Q\begin{bmatrix} 0_{r\times(n-r)}\\ I_{(n-r)\times(n-r)}\end{bmatrix} x_2(k)\\
&= Q\begin{bmatrix} I_{r\times r}\\ 0_{(n-r)\times r}\end{bmatrix}\Bigg(A_{01}^k\, x_1(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A_{01}^{k-1-i}\big[A_{11}x_1(i-\tau) + A_{12}x_2(i-\tau)\\
&\qquad + B_1u(i)\big]\Bigg) \;+\; Q\begin{bmatrix} 0_{r\times(n-r)}\\ I_{(n-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}\Bigg(-\sum_{i=0}^{h-1} N^i\big[A_{13}x_1(k+i-\tau)
\end{aligned}$$

$$+ A_{14}x_2(k+i-\tau) + B_2u(k+i)\Big]\Big),$$

ở đây

$$\begin{aligned} x_1(j) &= \begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0_{r\times(n-r)} \end{bmatrix} Q^{-1}x(j), \\ x_2(j) &= \begin{bmatrix} 0_{(n-r)\times r} & I_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} Q^{-1}x(j), \end{aligned} \qquad \forall j \geqslant -\tau, \ \ j \in \mathbb{Z}.$$

Trong (4.3), trạng thái con (substate) $x_1(k)$ được xác định một cách hoàn toàn bởi các trạng thái con trước đó $x_1(0)$, $x_1(j)$, $x_2(j)$, $j = -\tau, \ldots, k-1-\tau$, và các đầu vào trước đó $u(i)$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Mối liên hệ này giữa trạng thái $x(k)$ và đầu vào $u(k)$ được gọi là *tính nhân quả* (causality). Còn trong (4.4), các đầu vào ở tương lai $u(i)$, $k \leqslant i \leqslant k+h-1$ là cần thiết để xác định trạng thái con $x_2(k)$. Tuy nhiên, khi cho $N = 0$ trong (4.4), ta có $x_2(k) = -A_{13}x_1(k-\tau) - A_{14}x_2(k-\tau) - B_2u(k)$ và đây là mối liên hệ nhân quả. Một cách tổng quát, người ta định nghĩa:

Định nghĩa 4.2. ([9]) Hệ (4.1) được gọi là có tính nhân quả nếu trạng thái của nó $x(k)$ tại thời điểm $k \in \mathbb{N}$ bất kỳ được xác định một cách hoàn toàn bởi điều kiện ban đầu $\varphi(j)$, $j \in \{-\tau, -\tau+1, \ldots, 0\}$, các trạng thái trước đó $x(1), \ldots, x(k-1)$ và các đầu vào cho đến thời điểm k: $u(0), u(1), \ldots, u(k)$.

Tính nhân quả là một mối liên hệ quan trọng và lớp các hệ sở hữu mối liên hệ này là một lớp hệ quan trọng với ưu thế của khả năng dễ nhận thức (the advantage of easy realizability). Các hệ rời rạc thông thường luôn có thuộc tính này. Tương tự với Định lý 8-1.1 trong [9], ta có

Mệnh đề 4.1. *Hệ* (4.1) *có tính nhân quả khi và chỉ khi* $deg(det(sE - A_0)) = rank(E) = r$.

Bởi mệnh đề này nên trong hầu hết các tài liệu gần đây, người ta thường định nghĩa tính nhân quả một cách ngắn gọn như sau.

Định nghĩa 4.3. ([38, 59]) Cặp ma trận (E, A_0) được gọi là có tính nhân quả nếu $\deg(\det(sE - A_0)) = \operatorname{rank}(E) = r$.

Tiếp theo là một điều kiện cần và đủ cho tính nhân quả của cặp ma trận (E, A_0).

Bổ đề 4.2 ([59]). *Giả sử rằng cặp ma trận (E, A_0) là chính quy. Khi đó với hai ma trận P, Q sao cho Bổ đề 4.1 được thỏa mãn thì cặp ma trận (E, A_0) là nhân quả khi và chỉ khi $N = 0$.*

Sử dụng Bổ đề 4.1 và Bổ đề 4.2, ta có thể khẳng định được sự tồn tại duy nhất nghiệm của hệ (4.1). Thật vậy, điều này được nêu rõ trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 4.2 ([38]). *Nếu cặp ma trận (E, A_0) là chính quy và nhân quả, thì với hàm giá trị ban đầu $\varphi(k)$ tương thích bất kỳ, hệ (4.1) với $u(k) = 0$ có nghiệm duy nhất.*

Việc sử dụng tính chính quy và nhân quả của cặp ma trận (E, A_0) để xây dựng công thức nghiệm cho hệ (4.1) được tiến hành theo lược đồ nêu trên với $N = 0$ (trong [3], tác giả đã xét trường hợp $u(k) = 0$).

4.2. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN

Xét lớp hệ nơ-ron rời rạc suy biến có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + Wf(x(k)) + W_1 g(x(k-h(k))) + Bu(k) + C\omega(k), \\ z(k) &= A_1 x(k) + Dx(k-h(k)) + B_1 u(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(k) &= \varphi(k), \quad k \in \{-h_2, -h_2+1, \ldots, 0\}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

ở đây $x(k) = [x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k)]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ trạng thái của hệ nơ-ron; n là số nơ-ron; $u(k) \in \mathbb{R}^m$ là biến điều khiển đầu vào; $z(k) \in \mathbb{R}^p$ là hàm quan sát đầu ra của hệ nơ-ron;

$$\begin{aligned} f(x(k)) &= [f_1(x_1(k)), f_2(x_2(k)), \ldots, f_n(x_n(k))]^\mathsf{T}, \\ g(x(k-h(k))) &= [g_1(x_1(k-h(k))), g_2(x_2(k-h(k))), \ldots, g_n(x_n(k-h(k)))]^\mathsf{T} \end{aligned}$$

là các hàm kích hoạt khác nhau, ở đây f_i, g_i, $i = \overline{1,n}$, là các hàm khả vi liên tục trong lân cận của gốc và thỏa mãn điều kiện tăng trưởng: với mỗi $i \in \{1, \ldots, n\}$, tồn tại các hằng số dương a_i, b_i sao cho:

$$|f_i(\xi)| \leqslant a_i|\xi|, \quad |g_i(\xi)| \leqslant b_i|\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

$E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận suy biến với $\operatorname{rank}(E) = r \leqslant n$. Ma trận đường chéo $A = \operatorname{diag}\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\}$, $|\overline{a}_i| < 1$ $\forall i = \overline{1,n}$ biểu thị sự tự hoàn ngược nơ-ron; các ma trận W, $W_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tương ứng là ma trận liên kết trọng số và ma trận liên kết trọng số với trễ; $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{p\times m}$ là các ma trận điều khiển đầu vào; $C \in \mathbb{R}^{n\times q}$ là ma trận nhiễu đầu vào; A_1, $D \in \mathbb{R}^{p\times n}$ là các ma trận quan sát đầu ra; $h(k)$ là hàm trễ biến thiên theo thời gian thỏa mãn điều kiện

$$0 < h_1 \leqslant h(k) \leqslant h_2 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.7}$$

ở đây h_1, h_2 là các số nguyên dương cho trước; $\varphi(k)$ là hàm điều kiện ban đầu; $\omega(k) \in \mathbb{R}^q$ là biến nhiễu thỏa mãn điều kiện

$$\sum_{k=0}^{N} \omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k) < d, \tag{4.8}$$

với d là một số thực dương cho trước.

Định nghĩa 4.4. Hệ (4.5) với $u(k) = 0$ được gọi là chính quy và nhân quả nếu cặp ma trận (E, A) là chính quy và nhân quả.

Nhận xét 4.1. Nếu cặp (E, A) là chính quy và nhân quả, thì một hệ suy biến có thể được phân rã thành hai phần, cụ thể là một hệ con động lực và một (phương trình) ràng buộc đại số [3, 9]. Nếu một điều kiện ban đầu thỏa mãn ràng buộc đại số, thì điều kiện ban đầu đó được gọi là điều kiện ban đầu tương thích. Trái ngược với kết quả đã phát biểu ở mục trước cho hệ suy biến tuyến tính (xem Mệnh đề 4.2), Ví dụ 1 trong [34] cho thấy rằng ngay cả khi cặp ma trận (E, A) là chính quy và nhân quả, nghiệm của một hệ suy biến phi tuyến

có thể không tồn tại với điều kiện ban đầu tương thích $x(0)$ nào đó. Tóm lại, sự tồn tại nghiệm là một vấn đề cơ bản đối với các hệ suy biến phi tuyến nói chung và các hệ nơ-ron suy biến nói riêng, và hoàn toàn độc lập với tính chính quy và tính nhân quả. Vì lý do đó, bất cứ khi nào chúng ta tiến hành nghiên cứu các lớp hệ này, sự tồn tại duy nhất nghiệm, tính chính quy và nhân quả nên được xem xét một cách đồng thời.

Nhận xét 4.2. Các khái niệm *bị chặn trong thời gian hữu hạn* và $\mathcal{H}_\infty-$*bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với bộ* (c_1, c_2, R, N) *cho trước của hệ (4.5) với* $u(k) = 0$ được định nghĩa hoàn toàn tương tự như đã phát biểu cho hệ (3.3) với $u(k) = 0$ (xem Định nghĩa 3.2 và Định nghĩa 3.3). *Bài toán điều khiển* $\mathcal{H}_\infty$ *trong thời gian hữu hạn cho hệ (4.5)* cũng được định nghĩa hoàn toàn tương tự như đã tiến hành cho hệ (3.3) (xem Định nghĩa 3.4).

Bổ đề 4.3 ([42])**.** *Với* $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *là ma trận đối xứng xác định dương và* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *là ma trận tùy ý, bất đẳng thức sau đúng*

$$-A^{\mathsf{T}}NA \leqslant A + A^{\mathsf{T}} + N^{-1}.$$

Bổ đề 4.4 (Định lý hàm ẩn, [54])**.** *Giả sử* V *là tập mở trong* $\mathbb{R}^{n+p}$ *và* $F = (F_1, \ldots, F_n) : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *thuộc lớp* C^1 *trên* V*. Hơn nữa giả sử rằng* $F(x_0, t_0) = 0$ *với* $(x_0, t_0) \in V$ *nào đó, ở đây* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *và* $t_0 \in \mathbb{R}^p$*. Nếu ma trận Jacobi*

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x_0, t_0)$$

không suy biến thì tồn tại một tập mở $W \subset \mathbb{R}^p$ *chứa* t_0 *và một hàm khả vi liên tục duy nhất* $g : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *sao cho* $g(t_0) = x_0$*, và* $F(g(t), t) = 0$ *với mọi* $t \in W$*.*

Bổ đề 4.5 ([11])**.** *Cho* $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *là ma trận suy biến với* $rank(E) = r \leqslant n$*. Khi đó tồn tại hai ma trận không suy biến* P, Q *sao cho* $PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4.3. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Xét hệ nơ-ron rời rạc suy biến (4.5) với $u(k) = 0$, vì $\operatorname{rank}(E) = r \leqslant n$ nên theo Bổ đề 4.5 tồn tại hai ma trận không suy biến M, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho $MEG = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ta ký hiệu

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} M, \quad MAG = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$M^{-\mathsf{T}} P M^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad F = \operatorname{diag}\{a_1, \ldots, a_n\}, \quad H = \operatorname{diag}\{b_1, \ldots, b_n\},$$

$$\Phi_{11} = -\delta E^{\mathsf{T}} P E + (h_2 - h_1 + 1)Q + S_1 + A_1^{\mathsf{T}} A_1 + F^2 - P\bar{M}A - A\bar{M}^{\mathsf{T}} P,$$

$$\Phi_{22} = \delta^{h_1}(-S_1 + S_2), \quad \Phi_{44} = -\delta^{h_1} Q + D^{\mathsf{T}} D + H^2.$$

Từ đó, tính chính quy, tính nhân quả và sự tồn tại duy nhất nghiệm của hệ (4.5) được đảm bảo bởi định lý sau.

Định lý 4.1. *Cho trước các số dương γ, N. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (4.5) thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại các ma trận xác định dương đối xứng P, Q, S_1, S_2 và một số thực $\delta \geqslant 1$ sao cho bất đẳng thức ma trận sau đúng:*

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 & 0 & A_1^{\mathsf{T}} D & -P\bar{M}W & -P\bar{M}W_1 & -P\bar{M}C & AP \\ * & \Phi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\delta^{h_2} S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 & W^{\mathsf{T}} P \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & W_1^{\mathsf{T}} P \\ * & * & * & * & * & * & -\frac{\gamma}{\delta^N} I & C^{\mathsf{T}} P \\ * & * & * & * & * & * & * & -P \end{bmatrix} < 0. \tag{4.9}$$

Khi đó hệ (4.5) với $u(k) = 0$ là chính quy, nhân quả và có nghiệm duy nhất trong một lân cận của gốc.

Chứng minh. Trước hết, chúng ta sẽ chứng tỏ rằng hệ (4.5) với $u(k) = 0$ là chính quy và nhân quả. Nhận xét rằng (4.9) cho ta $\Phi_{11} < 0$, do đó $-\delta E^\mathsf{T} PE - P\bar{M}A - A\bar{M}^\mathsf{T} P < 0$ vì $Q > 0, S_1 > 0, F > 0$. Từ đó, bởi G là ma trận không suy biến, ta có $G^\mathsf{T}(-\delta E^\mathsf{T} PE - P\bar{M}A - A\bar{M}^\mathsf{T} P)G < 0$ mà có thể được tiếp tục biến đổi tương đương như sau:

$$
\begin{aligned}
& -\delta G^\mathsf{T} E^\mathsf{T} M^\mathsf{T} M^{-\mathsf{T}} P M^{-1} MEG - G^\mathsf{T} P\bar{M}AG - G^\mathsf{T} A\bar{M}^\mathsf{T} PG < 0 \\
\iff & -\delta \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (G^\mathsf{T} P)_{11} & (G^\mathsf{T} P)_{12} \\ (G^\mathsf{T} P)_{21} & (G^\mathsf{T} P)_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} 0 & A_{21}^\mathsf{T} \\ 0 & A_{22}^\mathsf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (G^\mathsf{T} P)_{11} & (G^\mathsf{T} P)_{12} \\ (G^\mathsf{T} P)_{21} & (G^\mathsf{T} P)_{22} \end{bmatrix}^\mathsf{T} < 0 \\
\iff & -\delta \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (G^\mathsf{T} P)_{12} A_{21} & (G^\mathsf{T} P)_{12} A_{22} \\ (G^\mathsf{T} P)_{22} A_{21} & (G^\mathsf{T} P)_{22} A_{22} \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} (G^\mathsf{T} P)_{12} A_{21} & (G^\mathsf{T} P)_{12} A_{22} \\ (G^\mathsf{T} P)_{22} A_{21} & (G^\mathsf{T} P)_{22} A_{22} \end{bmatrix}^\mathsf{T} < 0 \\
\iff & \begin{bmatrix} \star & \star \\ \star & -(G^\mathsf{T} P)_{22} A_{22} - A_{22}^\mathsf{T} (G^\mathsf{T} P)_{22}^\mathsf{T} \end{bmatrix} < 0,
\end{aligned}
$$

ở đây $\star$ biểu thị các ma trận không liên quan trong đoạn lập luận này. Từ bất đẳng thức cuối ta suy ra $(G^\mathsf{T} P)_{22} A_{22} + A_{22}^\mathsf{T} (G^\mathsf{T} P)_{22}^\mathsf{T} > 0$ và do đó A_{22} là ma trận không suy biến. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng A_{22} là ma trận suy biến, khi đó tồn tại một véc tơ $0 \neq \eta \in \mathbb{R}^{n-r}$ sao cho $A_{22}\eta = 0$. Từ đó

$$
\eta^\mathsf{T} [(G^\mathsf{T} P)_{22} A_{22} + A_{22}^\mathsf{T} (G^\mathsf{T} P)_{22}^\mathsf{T}]\eta = \eta^\mathsf{T} (G^\mathsf{T} P)_{22} A_{22} \eta + \eta^\mathsf{T} A_{22}^\mathsf{T} (G^\mathsf{T} P)_{22}^\mathsf{T} \eta = 0,
$$

tức là ma trận $(G^\mathsf{T} P)_{22} A_{22} + A_{22}^\mathsf{T} (G^\mathsf{T} P)_{22}^\mathsf{T}$ không xác định dương. Mâu thuẫn này cho phép chúng ta khẳng định rằng A_{22} là ma trận không suy biến, vì vậy

ta có thể đặt

$$\widehat{M} = \begin{bmatrix} I_r & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} M, \quad \widehat{G} = G \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & -A_{22}^{-1} \end{bmatrix},$$

và dễ dàng tính được

$$\widehat{M}E\widehat{G} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \widehat{M}A\widehat{G} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix} \text{ với } \widehat{A}_{11} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}.$$

Theo đó,

$$\widehat{M}(sE - A)\widehat{G} = s\widehat{M}E\widehat{G} - \widehat{M}A\widehat{G} = \begin{bmatrix} sI_r - \widehat{A}_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$$

và vì thế

$$\begin{aligned} \det(sE - A) &= \det(\widehat{M}^{-1}\widehat{M}(sE - A)\widehat{G}\widehat{G}^{-1}) \\ &= \det(\widehat{M}^{-1})\det(sI_r - \widehat{A}_{11})\det(\widehat{G}^{-1}). \end{aligned}$$

Để ý rằng $\det(sI_r - \widehat{A}_{11}) = \sum_{i=0}^{r} a_i s^i$ với $a_r = 1$ và $\det(\widehat{M}) \neq 0, \det(\widehat{G}) \neq 0$ (vì $\widehat{M}, \widehat{G}$ là các ma trận không suy biến), ta có thể kết luận rằng đa thức $\det(sE - A)$ không đồng nhất không, nghĩa là hệ (4.5) với $u(k) = 0$ là chính quy. Hơn nữa,

$$\deg(\det(sE - A)) = \deg(\det(sI_r - \widehat{A}_{11})) = r = \operatorname{rank}(E)$$

nên hệ đang xét là nhân quả.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh hệ (4.5) với $u(k) = 0$ có nghiệm duy nhất trong một lân cận của gốc. Bằng cách đặt

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \frac{d}{d(x_i(k))} f_i(x_i(k))\Big|_{x_i(k)=0}, \\ \lambda_i &= \frac{d}{d(x_i(k - h(k)))} g_i(x_i(k - h(k)))\Big|_{x_i(k-h(k))=0}, \end{aligned}$$

khi đó trong một lân cận của gốc, $f_i(x_i(k))$ và $g_i(x_i(k-h(k)))$ có thể được biểu diễn như sau

$$f_i(x_i(k)) = \gamma_i x_i(k) + \alpha_i(x_i(k)),$$
$$g_i(x_i(k-h(k))) = \lambda_i x_i(k-h(k)) + \beta_i(x_i(k-h(k))),$$

ở đây $\alpha_i(0) = 0,\ \beta_i(0) = 0$ và

$$\frac{d}{d(x_i(k))}\alpha_i(x_i(k))\Big|_{x_i(k)=0} = 0, \quad \lim_{x_i(k)\to 0}\frac{\alpha_i(x_i(k))}{x_i(k)} = 0,$$
$$\frac{d}{d(x_i(k-h(k)))}\beta_i(x_i(k-h(k)))\Big|_{x_i(k-h(k))=0} = 0,$$
$$\lim_{x_i(k-h(k))\to 0}\frac{\beta_i(x_i(k-h(k)))}{x_i(k-h(k))} = 0.$$

Vì thế,

$$\begin{aligned} f(x(k)) &= \Gamma x(k) + \alpha(x(k)), \\ g(x(k-h(k))) &= \Lambda x(k-h(k)) + \beta(x(k-h(k))), \end{aligned} \tag{4.10}$$

trong đó $\Gamma = \mathrm{diag}\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\},\ \ \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ và

$$\alpha(x(k)) = \big[\alpha_1(x_1(k)), \ldots, \alpha_n(x_n(k))\big]^{\mathsf{T}},$$
$$\beta(x(k-h(k))) = \big[\beta_1(x_1(k-h(k))), \ldots, \beta_n(x_n(k-h(k)))\big]^{\mathsf{T}},$$
$$\lim_{x(k)\to 0}\frac{\alpha(x(k))}{\|x(k)\|} = 0, \quad \lim_{x(k-h(k))\to 0}\frac{\beta(x(k-h(k)))}{\|x(k-h(k))\|} = 0.$$

Theo (4.10), hệ (4.5) với $u(k) = 0$ có thể được viết lại như sau

$$\begin{aligned} Ex(k+1) = (A + W\Gamma)x(k) + W_1\Lambda x(k-h(k)) + W\alpha(x(k)) \\ + W_1\beta(x(k-h(k))) + C\omega(k) \end{aligned}$$

trong một lân cận của gốc. Từ (4.6) và (4.10), ta có

$$\begin{aligned} x^{\mathsf{T}}(k)F^2x(k) &\geqslant f^{\mathsf{T}}(x(k))f(x(k)) \\ &= x^{\mathsf{T}}(k)\Gamma^2x(k) + 2x^{\mathsf{T}}(k)\Gamma\alpha(x(k)) + \alpha^{\mathsf{T}}(x(k))\alpha(x(k)). \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng

$$F^2 \geqslant \Gamma^2. \tag{4.11}$$

Thật vậy, theo trên, tồn tại $\delta > 0$ đủ bé sao cho

$$x^\mathsf{T}\Gamma^2 x + 2x^\mathsf{T}\Gamma\alpha(x) + \alpha^\mathsf{T}(x)\alpha(x) = f^\mathsf{T}(x)f(x) \leqslant x^\mathsf{T}F^2 x \quad \forall x \in B(0,\delta),$$

(ở đây $B(0,\delta)$ là hình cầu mở tâm O, bán kính δ). Từ đó,

$$x^\mathsf{T}(F^2 - \Gamma^2)x - 2x^\mathsf{T}\Gamma\alpha(x) - \alpha^\mathsf{T}(x)\alpha(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in B(0,\delta),$$

hay $\langle (F^2 - \Gamma^2)x, x\rangle - 2\langle \alpha(x), \Gamma x\rangle - \langle \alpha(x), \alpha(x)\rangle \geqslant 0$ $\forall x \in B(0,\delta)$. Một cách tương đương, ta có

$$\left\langle (F^2 - \Gamma^2)\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle - 2\left\langle \frac{\alpha(x)}{\|x\|}, \Gamma\frac{x}{\|x\|}\right\rangle - \left\langle \frac{\alpha(x)}{\|x\|}, \frac{\alpha(x)}{\|x\|}\right\rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in B(0,\delta).$$

Chú ý rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\|x\|} = 0$ theo cách đặt, nên khi qua giới hạn hai vế của bất đẳng thức trên bằng cách cho $x \to 0$, ta được

$$\lim_{x\to 0}\left\langle (F^2 - \Gamma^2)\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \geqslant 0. \tag{4.12}$$

Giả sử x_0 là một điểm bất kỳ thuộc $S(0,1)$: mặt cầu tâm O, bán kính 1. Xét dãy $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ xác định như sau: $x_k = \frac{\delta x_0}{2k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Khi đó rõ ràng rằng

$$x_k \in B(0,\delta)\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad x_k \to 0 \text{ khi } k \to \infty \quad \text{và} \quad \frac{x_k}{\|x_k\|} = x_0\ \forall k \in \mathbb{N}$$

nên theo (4.12) ta có:

$$\lim_{k\to\infty}\left\langle (F^2 - \Gamma^2)\frac{x_k}{\|x_k\|}, \frac{x_k}{\|x_k\|}\right\rangle \geqslant 0.$$

hay

$$\big\langle (F^2 - \Gamma^2)x_0, x_0\big\rangle \geqslant 0. \tag{4.13}$$

Vì (4.13) đúng với x_0 tùy ý thuộc $S(0,1)$ nên ta cũng có

$$\big\langle (F^2 - \Gamma^2)x, x\big\rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

nghĩa là $F^2 - \Gamma^2 \geqslant 0$ hay $F^2 \geqslant \Gamma^2$.

Đặt

$$\Upsilon := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

khi đó

$$\Phi < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{\Phi} := \Upsilon^{\mathsf{T}} \Phi \Upsilon < 0$$

ở đây $\bar{\Phi} = \left[\bar{\Phi}_{ij}\right]_{8\times 8}$ với

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{11} = &- \delta E^{\mathsf{T}} P E + (h_2 - h_1 + 1)Q + S_1 + A_1^{\mathsf{T}} A_1 + F^2 - \Gamma^2 - P\bar{M}(A + W\Gamma) \\ &- (A + W\Gamma)^{\mathsf{T}} \bar{M}^{\mathsf{T}} P. \end{aligned}$$

Từ (4.11) và $\bar{\Phi}_{11} < 0$, ta có

$$-\delta E^{\mathsf{T}} P E - P\bar{M}(A + W\Gamma) - (A + W\Gamma)^{\mathsf{T}} \bar{M}^{\mathsf{T}} P < 0.$$

Tương tự việc chứng minh cặp ma trận (E, A) là chính quy và nhân quả trong bước thứ nhất, có thể chỉ ra rằng cặp ma trận $(E, A + W\Gamma)$ là chính quy và nhân quả. Nghĩa là hệ xấp xỉ của (4.5) với $u(k) = 0$ trong một lân cận của gốc

$$Ex(k+1) = (A + W\Gamma)x(k) + W_1 \Lambda x(k - h(k)) + C\omega(k) \tag{4.14}$$

là chính quy và nhân quả. Đặt

$$MW\Gamma G = \begin{bmatrix} \widehat{\Gamma}_{11} & \widehat{\Gamma}_{12} \\ \widehat{\Gamma}_{21} & \widehat{\Gamma}_{22} \end{bmatrix}, \quad G^{-1}x(k) = \begin{bmatrix} x^1(k) \\ x^2(k) \end{bmatrix},$$

$$G^{-1}x(k-h(k)) = \begin{bmatrix} x^1(k-h(k)) \\ x^2(k-h(k)) \end{bmatrix}, \quad G^{-1}\varphi(k) = \begin{bmatrix} \varphi^1(k) \\ \varphi^2(k) \end{bmatrix},$$

$$MWf(x(k)) = \begin{bmatrix} f^1(x^1(k), x^2(k)) \\ f^2(x^1(k), x^2(k)) \end{bmatrix}, \quad MC\omega(k) = \begin{bmatrix} \omega^1(k) \\ \omega^2(k) \end{bmatrix},$$

$$MW_1 g(x(k-h(k))) = \begin{bmatrix} g^1(x^1(k-h(k)), x^2(k-h(k))) \\ g^2(x^1(k-h(k)), x^2(k-h(k))) \end{bmatrix},$$

khi đó hệ (4.5) với $u(k) = 0$ là tương đương với hệ sau

$$\begin{aligned} x^1(k+1) &= A_{11}x^1(k) + A_{12}x^2(k) + f^1(\cdot) + g^1(\cdot) + \omega^1(k), \\ 0 &= A_{21}x^1(k) + A_{22}x^2(k) + f^2(\cdot) + g^2(\cdot) + \omega^2(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ x^1(k) &= \varphi^1(k), \quad x^2(k) = \varphi^2(k), \ k \in \{-h_2, -h_2+1, \ldots, 0\}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Vì hệ (4.14) là chính quy và nhân quả,

$$\left.\frac{\partial F(x^1, x^2, f^2, g^2, \omega^2)}{\partial x^2(k)}\right|_{\substack{x^1(k)=x^1(k-h(k))=0 \\ x^2(k)=x^2(k-h(k))=0 \\ \omega^2(k)=0}} = A_{22} + \widehat{\Gamma}_{22},$$

ở đây $F(x^1, x^2, f^2, g^2, \omega^2) := A_{21}x^1(k) + A_{22}x^2(k) + f^2(\cdot) + g^2(\cdot) + \omega^2(k)$, là ma trận không suy biến (xem L. Dai [9]). Từ Định lý hàm ẩn (Bổ đề 4.4), suy ra rằng tồn tại một lân cận của $(x^1(k), x^2(k), x^1(k-h(k)), x^2(k-h(k)), \omega^2(k)) = (0, 0, 0, 0, 0)$ và một hàm khả vi liên tục duy nhất

$$\hat{f}^2(x^1(k), x^1(k-h(k)), x^2(k-h(k)), \omega^2(k))$$

theo $x^1(k)$, $x^1(k-h(k))$, $x^2(k-h(k))$, $\omega^2(k)$ sao cho

$$0 = A_{21}x^1(k) + A_{22}\hat{f}^2(\cdot) + f^2(\cdot) + g^2(\cdot) + \omega^2(k),$$

và $\hat{f}^2(0, 0, 0, 0) = 0$. Nói cách khác, trong một lân cận của $(0, 0, 0, 0, 0)$, phương trình thứ hai của (4.15) tồn tại nghiệm duy nhất

$$x^2(k) = \hat{f}^2(x^1(k), x^1(k-h(k)), x^2(k-h(k)), \omega^2(k)), \quad \hat{f}^2(0, 0, 0, 0) = 0.$$

Thế nghiệm này vào phương trình đầu của (4.15), ta thu được

$$\begin{aligned} x^1(k+1) = {} & A_{11}x^1(k) + A_{12}\hat{f}^2(x^1(k), x^1(k-h(k)), x^2(k-h(k)), \omega^2(k)) \\ & + f^1(x^1(k), \hat{f}^2(x^1(k), x^1(k-h(k)), x^2(k-h(k)), \omega^2(k))) \\ & + g^1(x^1(k-h(k)), x^2(k-h(k))) + \omega^1(k). \end{aligned}$$

Vì thế hệ (4.5) với $u(k) = 0$ có nghiệm duy nhất trong lân cận của gốc. Điều này hoàn tất chứng minh của định lý. □

Nhận xét 4.3. Trong [34] (tương ứng, trong [49]), các tác giả đã đề xuất một điều kiện đủ cho sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm của các hệ rời rạc suy biến với nhiễu phi tuyến bằng cách sử dụng nguyên lý điểm bất động (tương ứng, định lý hàm ẩn). Trong Định lý 4.1, bằng cách vận dụng định lý hàm ẩn như trong [49], chúng tôi thu được một điều kiện đủ cho không chỉ sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm, mà còn tính chính quy và nhân quả của hệ (4.5). Do điều kiện thu được có dạng bất đẳng thức ma trận nên có thể được giải một cách hiệu quả bằng cách sử dụng hộp công cụ LMI trong MATLAB [16].

Tiếp theo chúng tôi phát biểu các điều kiện đủ đảm bảo rằng hệ (4.5) với $u(k) = 0$ là $\mathcal{H}_\infty$−bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với (c_1, c_2, R, N).

Định lý 4.2. *Cho trước các số dương γ, N, c_1, c_2 với $c_1 < c_2$ và một ma trận xác định dương đối xứng R. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (4.5) thỏa mãn điều kiện sau: tồn tại các ma trận xác định dương đối xứng P, Q, S_1, S_2, các vô hướng dương λ_i, $i = \overline{1,5}$ và một số thực $\delta \geqslant 1$ sao cho các bất đẳng thức ma trận sau đúng:*

$$\Psi = \Big[\Psi_{ij}\Big]_{11\times 11} < 0, \tag{4.16}$$

$$E^{\mathsf{T}}PE < \lambda_1 R, \quad Q < \lambda_2 R, \quad \lambda_3 R < S_1 < \lambda_4 R, \quad S_2 < \lambda_5 R, \tag{4.17}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma d - c_2\lambda_3 & c_1\delta^{N+1}\lambda_1 & \rho\lambda_2 & c_1\delta^{N+h_1}h_1\lambda_4 & c_1\delta^{N+h_2}(h_2-h_1)\lambda_5 \\ * & -c_1\delta^{N+1}\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\rho\lambda_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -c_1\delta^{N+h_1}h_1\lambda_4 & 0 \\ * & * & * & * & -c_1\delta^{N+h_2}(h_2-h_1)\lambda_5 \end{bmatrix} < 0. \tag{4.18}$$

Khi đó hệ (4.5) với $u(k) = 0$ là $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với (c_1, c_2, R, N). Ở đây

$$\begin{aligned}
&\Psi_{11} = -\delta E^\mathsf{T} PE + (h_2 - h_1 + 1)Q + S_1 - P\bar{M}A - A\bar{M}^\mathsf{T} P, \quad \Psi_{15} = -P\bar{M}W, \\
&\Psi_{16} = -P\bar{M}W_1, \quad \Psi_{17} = -P\bar{M}C, \quad \Psi_{18} = AP, \quad \Psi_{19} = A_1^\mathsf{T}, \quad \Psi_{1,10} = F, \\
&\Psi_{22} = \Phi_{22}, \quad \Psi_{33} = -\delta^{h_2}S_2, \quad \Psi_{44} = -\delta^{h_1}Q, \quad \Psi_{49} = D^\mathsf{T}, \quad \Psi_{4,11} = H, \\
&\Psi_{55} = \Psi_{66} = \Psi_{99} = \Psi_{10,10} = \Psi_{11,11} = -I, \quad \Psi_{58} = W^\mathsf{T} P, \quad \Psi_{68} = W_1^\mathsf{T} P, \\
&\Psi_{77} = -\frac{\gamma}{\delta^N} I, \quad \Psi_{78} = C^\mathsf{T} P, \quad \Psi_{88} = -P, \quad \Psi_{ij} = 0 \ \textit{ với mọi i, j khác: } j > i, \\
&\Psi_{ij} = \Psi_{ji}^\mathsf{T} \ \ \forall i, j : \ i > j, \quad \rho = c_1 \tfrac{h_2(h_2+1) - h_1(h_1-1)}{2} \delta^{N+h_2}.
\end{aligned}$$

Chứng minh. Xét hàm toàn phương không âm sau đây:

$$V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k),$$

trong đó

$$\begin{aligned}
V_1(k) &= x^\mathsf{T}(k)E^\mathsf{T} PEx(k), \\
V_2(k) &= \sum_{s=-h_2+1}^{-h_1+1} \sum_{t=k-1+s}^{k-1} \delta^{k-1-t} x^\mathsf{T}(t)Qx(t), \\
V_3(k) &= \sum_{s=k-h_1}^{k-1} \delta^{k-1-s} x^\mathsf{T}(s)S_1 x(s) \ + \sum_{s=k-h_2}^{k-h_1-1} \delta^{k-1-s} x^\mathsf{T}(s)S_2 x(s).
\end{aligned}$$

Lấy biến thể sai phân của $V_i(k), i = 1, 2, 3$, ta có

$$
\begin{aligned}
&V_1(k+1) - \delta V_1(k) \\
&\quad = x^{\mathsf{T}}(k+1)E^{\mathsf{T}}PEx(k+1) - \delta x^{\mathsf{T}}(k)E^{\mathsf{T}}PEx(k) \\
&\quad = \begin{bmatrix} x(k) \\ f(x(k)) \\ g(x(k-h(k))) \\ \omega(k) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} A \\ W^{\mathsf{T}} \\ W_1^{\mathsf{T}} \\ C^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A & W & W_1 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ f(x(k)) \\ g(x(k-h(k))) \\ \omega(k) \end{bmatrix} \\
&\qquad - \delta x^{\mathsf{T}}(k)E^{\mathsf{T}}PEx(k), \\
&V_2(k+1) - \delta V_2(k) \\
&\quad = \sum_{s=-h_2+1}^{-h_1+1} \sum_{t=k+s}^{k} \delta^{k-t} x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) - \sum_{s=-h_2+1}^{-h_1+1} \sum_{t=k-1+s}^{k-1} \delta^{k-t} x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) \\
&\quad = \sum_{s=-h_2+1}^{-h_1+1} \left[x^{\mathsf{T}}(k)Qx(k) - \delta^{1-s} x^{\mathsf{T}}(k-1+s)Qx(k-1+s) \right] \\
&\quad = (h_2 - h_1 + 1)x^{\mathsf{T}}(k)Qx(k) - \sum_{s=k-h_2}^{k-h_1} \delta^{k-s} x^{\mathsf{T}}(s)Qx(s) \\
&\quad \leqslant (h_2 - h_1 + 1)x^{\mathsf{T}}(k)Qx(k) - \delta^{h_1} x^{\mathsf{T}}(k-h(k))Qx(k-h(k)), \\
&V_3(k+1) - \delta V_3(k) \\
&\quad = \sum_{s=k+1-h_1}^{k} \delta^{k-s} x^{\mathsf{T}}(s)S_1x(s) - \sum_{s=k-h_1}^{k-1} \delta^{k-s} x^{\mathsf{T}}(s)S_1x(s) \\
&\qquad + \sum_{s=k+1-h_2}^{k-h_1} \delta^{k-s} x^{\mathsf{T}}(s)S_2x(s) - \sum_{s=k-h_2}^{k-h_1-1} \delta^{k-s} x^{\mathsf{T}}(s)S_2x(s) \\
&\quad = x^{\mathsf{T}}(k)S_1x(k) + x^{\mathsf{T}}(k-h_1) \left[\delta^{h_1}(-S_1 + S_2) \right] x(k-h_1) \\
&\qquad - \delta^{h_2} x^{\mathsf{T}}(k-h_2)S_2x(k-h_2).
\end{aligned}
$$

Từ đó

$$
\begin{aligned}
&V(k+1)-\delta V(k)\\
&\quad\leqslant \begin{bmatrix} x(k)\\ f(x(k))\\ g(x(k-h(k)))\\ \omega(k)\end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} A\\ W^{\mathsf{T}}\\ W_1^{\mathsf{T}}\\ C^{\mathsf{T}}\end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A & W & W_1 & C\end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k)\\ f(x(k))\\ g(x(k-h(k)))\\ \omega(k)\end{bmatrix}\\
&\qquad + x^{\mathsf{T}}(k)\left[-\delta E^{\mathsf{T}}PE+(h_2-h_1+1)Q+S_1\right]x(k)\\
&\qquad + x^{\mathsf{T}}(k-h_1)\left[\delta^{h_1}(-S_1+S_2)\right]x(k-h_1)\\
&\qquad + x^{\mathsf{T}}(k-h_2)\left[-\delta^{h_2}S_2\right]x(k-h_2)+x^{\mathsf{T}}(k-h(k))\left[-\delta^{h_1}Q\right]x(k-h(k))\\
&\qquad + z^{\mathsf{T}}(k)z(k)-\frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k)+\frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k)-z^{\mathsf{T}}(k)z(k)\\
&\quad= \begin{bmatrix} x(k)\\ f(x(k))\\ g(x(k-h(k)))\\ \omega(k)\end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} A\\ W^{\mathsf{T}}\\ W_1^{\mathsf{T}}\\ C^{\mathsf{T}}\end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A & W & W_1 & C\end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k)\\ f(x(k))\\ g(x(k-h(k)))\\ \omega(k)\end{bmatrix}\\
&\qquad + x^{\mathsf{T}}(k)\left[-\delta E^{\mathsf{T}}PE+(h_2-h_1+1)Q+S_1+A_1^{\mathsf{T}}A_1\right]x(k)\\
&\qquad + 2x^{\mathsf{T}}(k)A_1^{\mathsf{T}}Dx(k-h(k))+x^{\mathsf{T}}(k-h_1)\left[\delta^{h_1}(-S_1+S_2)\right]x(k-h_1)\\
&\qquad + x^{\mathsf{T}}(k-h_2)\left[-\delta^{h_2}S_2\right]x(k-h_2)\\
&\qquad + x^{\mathsf{T}}(k-h(k))\left[-\delta^{h_1}Q+D^{\mathsf{T}}D\right]x(k-h(k))+\omega^{\mathsf{T}}(k)\left[-\frac{\gamma}{\delta^N}I\right]\omega(k)\\
&\qquad + \frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k)-z^{\mathsf{T}}(k)z(k). \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

Bởi giả thiết (4.6) ta có các ước lượng sau

$$
\begin{aligned}
&0\leqslant -f^{\mathsf{T}}(x(k))f(x(k))+x^{\mathsf{T}}(k)F^2x(k),\\
&0\leqslant -g^{\mathsf{T}}(x(k-h(k)))g(x(k-h(k)))+x^{\mathsf{T}}(k-h(k))H^2x(k-h(k)).
\end{aligned} \qquad (4.20)
$$

Nhân hai vế của phương trình

$$
Ex(k+1)=Ax(k)+Wf(x(k))+W_1g(x(k-h(k)))+C\omega(k)
$$

với $-2x^{\mathsf{T}}(k)P\bar{M}$ và lưu ý rằng $\bar{M}E = 0$, ta được đẳng thức

$$\begin{aligned} 0 = &- 2x^{\mathsf{T}}(k)P\bar{M}Ax(k) - 2x^{\mathsf{T}}(k)P\bar{M}Wf(x(k)) \\ &- 2x^{\mathsf{T}}(k)P\bar{M}W_1 g(x(k-h(k))) - 2x^{\mathsf{T}}(k)P\bar{M}C\omega(k). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Nhận xét rằng bằng cách đặt

$$\begin{aligned} \xi(k) = \big[&x^{\mathsf{T}}(k)\ \ x^{\mathsf{T}}(k-h_1)\ \ x^{\mathsf{T}}(k-h_2)\ \ x^{\mathsf{T}}(k-h(k)) \\ &f^{\mathsf{T}}(x(k))\ \ g^{\mathsf{T}}(x(k-h(k)))\ \ \omega^{\mathsf{T}}(k)\big]^{\mathsf{T}}, \end{aligned}$$

khi ấy số hạng đầu tiên trong vế phải của (4.19) có thể được viết gọn như sau

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} x(k) \\ f(x(k)) \\ g(x(k-h(k))) \\ \omega(k) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} A \\ W^{\mathsf{T}} \\ W_1^{\mathsf{T}} \\ C^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A & W & W_1 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ f(x(k)) \\ g(x(k-h(k))) \\ \omega(k) \end{bmatrix} \\ &= \xi^{\mathsf{T}}(k) \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ W^{\mathsf{T}} \\ W_1^{\mathsf{T}} \\ C^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & W & W_1 & C \end{bmatrix} \xi(k) \\ &= \xi^{\mathsf{T}}(k)\Upsilon^{\mathsf{T}}P^{-1}\Upsilon\xi(k), \end{aligned} \tag{4.22}$$

ở đây $\Upsilon := \begin{bmatrix} PA & 0 & 0 & 0 & PW & PW_1 & PC \end{bmatrix}$. Kết hợp (4.19), (4.20), (4.21) và (4.22) ta thấy

$$
\begin{aligned}
&V(k+1)-\delta V(k)\\
&\quad\leqslant x^{\mathsf{T}}(k)\big[-\delta E^{\mathsf{T}}PE+(h_2-h_1+1)Q+S_1+A_1^{\mathsf{T}}A_1+F^2-P\bar{M}A\\
&\qquad -A\bar{M}^{\mathsf{T}}P\big]x(k)+2x^{\mathsf{T}}(k)A_1^{\mathsf{T}}Dx(k-h(k))+2x^{\mathsf{T}}(k)\left[-P\bar{M}W\right]f(x(k))\\
&\qquad +2x^{\mathsf{T}}(k)\left[-P\bar{M}W_1\right]g(x(k-h(k)))+2x^{\mathsf{T}}(k)\left[-P\bar{M}C\right]\omega(k)\\
&\qquad +x^{\mathsf{T}}(k-h_1)\left[\delta^{h_1}(-S_1+S_2)\right]x(k-h_1)\\
&\qquad +x^{\mathsf{T}}(k-h_2)\left[-\delta^{h_2}S_2\right]x(k-h_2)\\
&\qquad +x^{\mathsf{T}}(k-h(k))\left[-\delta^{h_1}Q+D^{\mathsf{T}}D+H^2\right]x(k-h(k))\\
&\qquad +f^{\mathsf{T}}(x(k))\left[-I\right]f(x(k))+g^{\mathsf{T}}(x(k-h(k)))\left[-I\right]g(x(k-h(k)))\\
&\qquad +\omega^{\mathsf{T}}(k)\left[-\frac{\gamma}{\delta^N}I\right]\omega(k)+\xi^{\mathsf{T}}(k)\Upsilon^{\mathsf{T}}P^{-1}\Upsilon\xi(k)\\
&\qquad +\frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k)-z^{\mathsf{T}}(k)z(k)\\
&\quad =\xi^{\mathsf{T}}(k)\left(\widetilde{\Phi}+\Upsilon^{\mathsf{T}}P^{-1}\Upsilon\right)\xi(k)+\frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k)-z^{\mathsf{T}}(k)z(k),
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

với $\widetilde{\Phi}=\begin{bmatrix}
\Phi_{11} & 0 & 0 & A_1^{\mathsf{T}}D & -P\bar{M}W & -P\bar{M}W_1 & -P\bar{M}C\\
* & \Phi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & -\delta^{h_2}S_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & \Phi_{44} & 0 & 0 & 0\\
* & * & * & * & -I & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & -I & 0\\
* & * & * & * & * & * & -\frac{\gamma}{\delta^N}I
\end{bmatrix}.$

Chú ý rằng, bởi Bổ đề 1.1, nếu đặt

$$\widehat{\Phi}_{11}=-\delta E^{\mathsf{T}}PE+(h_2-h_1+1)Q+S_1+F^2-P\bar{M}A-A\bar{M}^{\mathsf{T}}P,$$

thì

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\Phi}+\Upsilon^{\mathsf{T}}P^{-1}\Upsilon<0\\
&\Leftrightarrow \Phi<0
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \widehat{\Phi}_{11} & 0 & 0 & 0 & -P\bar{M}W & -P\bar{M}W_1 & -P\bar{M}C & AP & A_1^{\mathsf{T}} \\ * & \Phi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\delta^{h_2}S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\delta^{h_1}Q+H^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & D^{\mathsf{T}} \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 & W^{\mathsf{T}}P & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & W_1^{\mathsf{T}}P & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\frac{\gamma}{\delta^N}I & C^{\mathsf{T}}P & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -P & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0 & 0 & 0 & -P\bar{M}W & -P\bar{M}W_1 & -P\bar{M}C & AP & A_1^{\mathsf{T}} & F \\ * & \Phi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\delta^{h_2}S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\delta^{h_1}Q+H^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & D^{\mathsf{T}} & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 & W^{\mathsf{T}}P & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 & W_1^{\mathsf{T}}P & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\frac{\gamma}{\delta^N}I & C^{\mathsf{T}}P & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -P & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\Leftrightarrow \Psi < 0. \tag{4.24}$$

Do đó, từ (4.16), (4.23) và (4.24) suy ra

$$V(k+1) \leqslant \delta V(k) + \frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.25}$$

Bởi phép lặp và giả thiết (4.8), bất đẳng thức (4.25) cho ta

$$\begin{aligned} V(k+1) &\leqslant \delta^{k+1}V(0) + \frac{\gamma}{\delta^N}\sum_{s=0}^{k}\delta^{k-s}\omega^{\mathsf{T}}(s)\omega(s) \\ &\leqslant \delta^{N+1}V(0) + \frac{\gamma}{\delta^N}\delta^N\sum_{s=0}^{N}\omega^{\mathsf{T}}(s)\omega(s) \\ &< \delta^{N+1}V(0) + \gamma d \quad \forall k = 0, 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Sử dụng giả thiết (4.17) và $x(k) = \varphi(k)\ \forall k \in \{-h_2, -h_2+1, \ldots, 0\}$, hiển nhiên rằng

$$\begin{aligned}
V(0) &= x^{\mathsf{T}}(0)E^{\mathsf{T}}PEx(0) + \sum_{s=-h_2+1}^{-h_1+1}\sum_{t=-1+s}^{-1}\delta^{-1-t}x^{\mathsf{T}}(t)Qx(t) \\
&\quad + \sum_{s=-h_1}^{-1}\delta^{-1-s}x^{\mathsf{T}}(s)S_1x(s) + \sum_{s=-h_2}^{-h_1-1}\delta^{-1-s}x^{\mathsf{T}}(s)S_2x(s) \\
&< \lambda_1 x^{\mathsf{T}}(0)Rx(0) + \lambda_2\delta^{h_2-1}\sum_{s=-h_2+1}^{-h_1+1}\sum_{t=-1+s}^{-1}x^{\mathsf{T}}(t)Rx(t) \\
&\quad + \lambda_4\delta^{h_1-1}\sum_{s=-h_1}^{-1}x^{\mathsf{T}}(s)Rx(s) + \lambda_5\delta^{h_2-1}\sum_{s=-h_2}^{-h_1-1}x^{\mathsf{T}}(s)Rx(s) \\
&\leqslant \Big[\lambda_1 + \lambda_2\frac{h_2(h_2+1)-h_1(h_1-1)}{2}\delta^{h_2-1} \\
&\qquad\qquad + \lambda_4 h_1\delta^{h_1-1} + \lambda_5(h_2-h_1)\delta^{h_2-1}\Big]c_1. \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

Kết hợp (4.26) với (4.27), ta được

$$V(k+1) < \delta^{N+1}\sigma + \gamma d \quad \forall k = 0, 1, \ldots, N, \qquad (4.28)$$

ở đây

$$\sigma := \Big[\lambda_1 + \lambda_2\tfrac{h_2(h_2+1)-h_1(h_1-1)}{2}\delta^{h_2-1} + \lambda_4 h_1\delta^{h_1-1} + \lambda_5(h_2-h_1)\delta^{h_2-1}\Big]c_1.$$

Mặt khác, theo (4.17) một lần nữa, ước lượng sau đúng

$$\begin{aligned}
V(k+1) \geqslant V_3(k+1) &\geqslant \sum_{s=k+1-h_1}^{k}\delta^{k-s}x^{\mathsf{T}}(s)S_1x(s) \geqslant x^{\mathsf{T}}(k)S_1x(k) \\
&> \lambda_3 x^{\mathsf{T}}(k)Rx(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+. \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

Nhận xét rằng, bởi Bổ đề 1.1, (4.18) tương đương với

$$\begin{aligned}
&\gamma d - c_2\lambda_3 + c_1\delta^{N+1}\lambda_1 + \rho\lambda_2 + c_1\delta^{N+h_1}h_1\lambda_4 + c_1\delta^{N+h_2}(h_2-h_1)\lambda_5 < 0 \\
\iff &\gamma d - c_2\lambda_3 + c_1\delta^{N+1}\Big[\lambda_1 + \lambda_2\tfrac{h_2(h_2+1)-h_1(h_1-1)}{2}\delta^{h_2-1} \\
&\qquad\qquad + \lambda_4 h_1\delta^{h_1-1} + \lambda_5(h_2-h_1)\delta^{h_2-1}\Big] < 0
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \gamma d - c_2\lambda_3 + \delta^{N+1}\sigma < 0. \tag{4.30}$$

Vì vậy, từ (4.28), (4.29) và (4.30) ta nhận được:

$$x^{\mathsf{T}}(k)Rx(k) < \frac{1}{\lambda_3}\left[\delta^{N+1}\sigma + \gamma d\right] < c_2 \quad \forall k = 1, 2, \ldots, N,$$

tức hệ đang xét là bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với (c_1, c_2, R, N). Để hoàn tất chứng minh của định lý, ta còn phải chứng tỏ điều kiện mức γ hữu hạn (3.6) đúng. Với mục đích đó, từ (4.23) suy ra

$$V(k+1) \leqslant \delta V(k) + \frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(k)\omega(k) - z^{\mathsf{T}}(k)z(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+,$$

và bởi phép lặp, ta có

$$0 \leqslant V(k) \leqslant \delta^k V(0) + \sum_{s=0}^{k-1}\delta^{k-1-s}\left[\frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(s)\omega(s) - z^{\mathsf{T}}(s)z(s)\right] \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.31}$$

Dưới điều kiện đầu bằng không, dễ thấy $V(0) = 0$ nên (4.31) cho ta

$$\sum_{s=0}^{k-1}\delta^{k-1-s}z^{\mathsf{T}}(s)z(s) \;\leqslant\; \sum_{s=0}^{k-1}\delta^{k-1-s}\frac{\gamma}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(s)\omega(s) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Từ đó, với $k = N+1$, ta có

$$\sum_{s=0}^{N}\delta^{N-s}z^{\mathsf{T}}(s)z(s) \;\leqslant\; \gamma\sum_{s=0}^{N}\frac{\delta^{N-s}}{\delta^N}\omega^{\mathsf{T}}(s)\omega(s). \tag{4.32}$$

Vì $1 \leqslant \delta^{N-s} \leqslant \delta^N \;\; \forall s \in \{0, 1, \ldots, N\}$ nên (4.32) kéo theo

$$\sum_{s=0}^{N}z^{\mathsf{T}}(s)z(s) \;\leqslant\; \gamma\sum_{s=0}^{N}\omega^{\mathsf{T}}(s)\omega(s),$$

nghĩa là, điều kiện (3.6) được chứng minh. Định lý được chứng minh đầy đủ. □

Sử dụng Định lý 4.2 chúng ta có thể giải quyết bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ (4.5). Ý tưởng ở đây là thiết kế một hàm điều

khiển phản hồi $u(k) = Kx(k)$ sao cho hệ đóng thu được

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= (A+BK)x(k) + Wf(x(k)) + W_1 g(x(k-h(k))) + C\omega(k), \\ z(k) &= (A_1 + B_1 K)x(k) + Dx(k-h(k)), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \\ x(k) &= \varphi(k),\ k \in \{-h_2, -h_2+1, \ldots, 0\}, \end{aligned} \tag{4.33}$$

là $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn.

Định lý 4.3. *Cho trước các số dương γ, N, c_1, c_2 với $c_1 < c_2$ và một ma trận xác định dương đối xứng R. Giả sử rằng các ma trận hệ số của hệ (4.5) thỏa mãn điều kiện: tồn tại các ma trận xác định dương đối xứng U_i, V_j với $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,5}$, một ma trận Y và một số thực $\delta \geqslant 1$ sao cho các bất đẳng thức ma trận sau đúng:*

$$\Omega = \left[\Omega_{ij}\right]_{11\times 11} < 0, \tag{4.34}$$

$$\begin{bmatrix} -V_1 & U_1 E^{\mathsf{T}} \\ * & -U_1 \end{bmatrix} < 0, \tag{4.35}$$

$$U_2 < V_2, \quad U_3 < V_4, \quad U_4 < V_5, \tag{4.36}$$

$$\begin{bmatrix} -V_3 & c_1\delta^{N+1}V_1 & \rho V_2 & c_1\delta^{N+h_1}h_1 V_4 & c_1\delta^{N+h_2}(h_2-h_1)V_5 \\ * & -c_1\delta^{N+1}V_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\rho V_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -c_1\delta^{N+h_1}h_1 V_4 & 0 \\ * & * & * & * & -c_1\delta^{N+h_2}(h_2-h_1)V_5 \end{bmatrix} < 0, \tag{4.37}$$

$$\begin{bmatrix} V_3 - c_2 U_3 & \gamma d U_1 R \\ * & -\gamma d R \end{bmatrix} < 0. \tag{4.38}$$

Khi đó, bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ (4.5) là giải được. Hơn nữa, hàm điều khiển phản hồi được xác định bởi

$$u(k) = YU_1^{-1}x(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

ở đây

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} &= \delta U_1 + (h_2 - h_1 + 1)U_2 + U_3 + \delta(U_1 E^{\mathsf{T}} + E U_1) - \bar{M}(AU_1 + BY) \\
&\quad - (U_1 A + Y^{\mathsf{T}} B^{\mathsf{T}})\bar{M}^{\mathsf{T}}, \\
\Omega_{15} &= -\bar{M}W, \;\; \Omega_{16} = -\bar{M}W_1, \;\; \Omega_{17} = -\bar{M}C, \;\; \Omega_{18} = U_1 A + Y^{\mathsf{T}} B^{\mathsf{T}}, \\
\Omega_{19} &= U_1 A_1^{\mathsf{T}} + Y^{\mathsf{T}} B_1^{\mathsf{T}}, \;\; \Omega_{1,10} = U_1 F, \;\; \Omega_{22} = \delta^{h_1}(-U_3 + U_4), \\
\Omega_{33} &= -\delta^{h_2} U_4, \;\; \Omega_{44} = -\delta^{h_1} U_2, \;\; \Omega_{49} = U_1 D^{\mathsf{T}}, \;\; \Omega_{4,11} = U_1 H, \\
\Omega_{55} &= \Omega_{66} = \Omega_{99} = \Omega_{10,10} = \Omega_{11,11} = -I, \;\; \Omega_{58} = W^{\mathsf{T}}, \;\; \Omega_{68} = W_1^{\mathsf{T}}, \\
\Omega_{77} &= -\frac{\gamma}{\delta^N} I, \;\; \Omega_{78} = C^{\mathsf{T}}, \;\; \Omega_{88} = -U_1, \;\; \Omega_{ij} = 0 \;\; \textit{với mọi } i, j \textit{ khác: } j > i, \\
\Omega_{ij} &= \Omega_{ji}^{\mathsf{T}} \;\; \forall i, j : \; i > j, \;\; \rho = c_1 \tfrac{h_2(h_2+1) - h_1(h_1-1)}{2} \delta^{N+h_2}.
\end{aligned}$$

Chứng minh. Hiển nhiên rằng, theo Định lý 4.2, hệ (4.33) là $\mathcal{H}_\infty$−bị chặn trong thời gian hữu hạn nếu tồn tại các ma trận xác định dương đối xứng P, Q, S_1, S_2, các vô hướng dương λ_i, $i = \overline{1,5}$, và một số thực $\delta \geqslant 1$ sao cho các điều kiện (4.16), (4.17) và (4.18) đúng, trong đó các ma trận $A+BK, A_1+B_1K$ sẽ thế chỗ của các ma trận A, A_1, tương ứng. Nói cách khác, tương ứng với (4.16), ta có

$$\Theta = \Big[\Theta_{ij}\Big]_{11\times 11} < 0, \tag{4.39}$$

ở đây

$$\begin{aligned}
&\Theta_{11} = -\delta E^{\mathsf{T}} P E + (h_2 - h_1 + 1)Q + S_1 - P\bar{M}(A + BK) - (A + BK)^{\mathsf{T}} \bar{M}^{\mathsf{T}} P, \\
&\Theta_{18} = (A + BK)^{\mathsf{T}} P, \quad \Theta_{19} = (A_1 + B_1 K)^{\mathsf{T}}, \\
&\Theta_{ij} = \Psi_{ij} \;\; \text{với mọi } i, j \text{ khác}: \; j \geqslant i, \quad \Theta_{ij} = \Theta_{ji}^{\mathsf{T}} \;\; \forall i, j : \; i > j.
\end{aligned}$$

Nhân phía trước và phía sau (4.39) bởi ma trận

$$\mathrm{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, I, I, I, P^{-1}, I, I, I\} > 0$$

rồi định nghĩa các biến ma trận mới như sau:

$$U_1 = P^{-1}, \quad U_2 = P^{-1} Q P^{-1}, \quad U_3 = P^{-1} S_1 P^{-1}, \quad U_4 = P^{-1} S_2 P^{-1},$$

ta sẽ thu được bất đẳng thức tương đương

$$\bar{\Theta} < 0, \tag{4.40}$$

ở đây $\bar{\Theta} = \left[\bar{\Theta}_{ij}\right]_{11\times 11}$ với

$$\begin{aligned}
\bar{\Theta}_{11} &= -\delta U_1 E^{\mathsf{T}} U_1^{-1} E U_1 + (h_2 - h_1 + 1)U_2 + U_3 - \bar{M}(A + BK)U_1 \\
&\quad - U_1(A + BK)^{\mathsf{T}} \bar{M}^{\mathsf{T}}, \\
\bar{\Theta}_{18} &= U_1(A + BK)^{\mathsf{T}}, \quad \bar{\Theta}_{19} = U_1(A_1 + B_1 K)^{\mathsf{T}}, \\
\bar{\Theta}_{ij} &= \Omega_{ij} \ \text{ với mọi } i, j \text{ khác}: \ j \geqslant i, \quad \bar{\Theta}_{ij} = \bar{\Theta}_{ji}^{\mathsf{T}} \ \forall i, j: \ i > j.
\end{aligned}$$

Bằng cách đặt $Y^{\mathsf{T}} = U_1 K^{\mathsf{T}}$, $K = Y U_1^{-1}$, (4.40) trở thành

$$\bar{\Omega} < 0, \tag{4.41}$$

ở đây $\bar{\Omega} = \left[\bar{\Omega}_{ij}\right]_{11\times 11}$ với

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}_{11} &= -\delta U_1 E^{\mathsf{T}} U_1^{-1} E U_1 + (h_2 - h_1 + 1)U_2 + U_3 - \bar{M}(AU_1 + BY) \\
&\quad - (U_1 A + Y^{\mathsf{T}} B^{\mathsf{T}})\bar{M}^{\mathsf{T}}, \\
\bar{\Omega}_{18} &= U_1 A + Y^{\mathsf{T}} B^{\mathsf{T}}, \quad \bar{\Omega}_{19} = U_1 A_1^{\mathsf{T}} + Y^{\mathsf{T}} B_1^{\mathsf{T}}, \\
\bar{\Omega}_{ij} &= \Omega_{ij} \ \text{ với mọi } i, j \text{ khác}: \ j \geqslant i, \quad \bar{\Omega}_{ij} = \bar{\Omega}_{ji}^{\mathsf{T}} \ \forall i, j: \ i > j.
\end{aligned}$$

Nhận xét rằng bởi Bổ đề 4.3,

$$-\delta U_1 E^{\mathsf{T}} U_1^{-1} E U_1 \leqslant \delta(U_1 E^{\mathsf{T}} + E U_1 + U_1),$$

do đó (4.41) đúng nếu (4.34) đúng. Để thu được (4.37), ta lưu ý rằng bất đẳng thức (4.18) có thể được coi như

$$\begin{bmatrix}
(\gamma d - c_2\lambda_3)I & c_1\delta^{N+1}\lambda_1 I & \rho\lambda_2 I & c_1\delta^{N+h_1}h_1\lambda_4 I & c_1\delta^{N+h_2}(h_2 - h_1)\lambda_5 I \\
* & -c_1\delta^{N+1}\lambda_1 I & 0 & 0 & 0 \\
* & * & -\rho\lambda_2 I & 0 & 0 \\
* & * & * & -c_1\delta^{N+h_1}h_1\lambda_4 I & 0 \\
* & * & * & * & -c_1\delta^{N+h_2}(h_2 - h_1)\lambda_5 I
\end{bmatrix} < 0. \tag{4.42}$$

Nhân phía sau (4.42) bởi ma trận $\mathrm{diag}\{R, R, R, R, R\} > 0$ ta nhận được

$$\begin{bmatrix} \gamma dR - c_2\lambda_3 R & c_1\delta^{N+1}\lambda_1 R & \rho\lambda_2 R & c_1\delta^{N+h_1}h_1\lambda_4 R & c_1\delta^{N+h_2}(h_2-h_1)\lambda_5 R \\ * & -c_1\delta^{N+1}\lambda_1 R & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\rho\lambda_2 R & 0 & 0 \\ * & * & * & -c_1\delta^{N+h_1}h_1\lambda_4 R & 0 \\ * & * & * & * & -c_1\delta^{N+h_2}(h_2-h_1)\lambda_5 R \end{bmatrix} < 0. \tag{4.43}$$

Tiếp theo, nhân phía trước và phía sau (4.43) bởi ma trận

$$\mathrm{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}\} > 0$$

rồi đặt các biến mới

$$\begin{aligned} V_1 &= P^{-1}(\lambda_1 R)P^{-1}, \quad V_2 = P^{-1}(\lambda_2 R)P^{-1}, \\ V_3 &= -\gamma dP^{-1}RP^{-1} + c_2P^{-1}(\lambda_3 R)P^{-1}, \\ V_4 &= P^{-1}(\lambda_4 R)P^{-1}, \quad V_5 = P^{-1}(\lambda_5 R)P^{-1}, \end{aligned}$$

ta đi đến (4.37) như mong muốn. Để nhận được các bất đẳng thức (4.35) và (4.36), ta chỉ việc nhân phía trước và phía sau (4.17) bởi ma trận P^{-1}. Thật vậy, để minh họa, ta sẽ chứng minh (4.35). Nhận xét rằng

$$\begin{aligned} E^{\mathsf{T}}PE < \lambda_1 R \quad &\Longleftrightarrow \quad P^{-1}E^{\mathsf{T}}PEP^{-1} < P^{-1}(\lambda_1 R)P^{-1} \\ &\Longleftrightarrow \quad U_1E^{\mathsf{T}}U_1^{-1}EU_1 < V_1 \\ &\Longleftrightarrow \quad -V_1 + U_1E^{\mathsf{T}}U_1^{-1}EU_1 < 0, \end{aligned}$$

bất đẳng thức cuối tương đương với (4.35) bởi Bổ đề 1.1. Cuối cùng, để ý rằng

$$\begin{aligned} V_3 = -\gamma dP^{-1}RP^{-1} + c_2P^{-1}(\lambda_3 R)P^{-1} &< -\gamma dP^{-1}RP^{-1} + c_2P^{-1}S_1P^{-1} \\ &= -\gamma dU_1RU_1 + c_2U_3, \end{aligned}$$

ta nhận được

$$V_3 - c_2U_3 + \gamma dU_1R[\gamma dR]^{-1}\gamma dRU_1 < 0,$$

mà rõ ràng tương đương với (4.38) bởi Bổ đề 1.1. Định lý đã được chứng minh hoàn toàn. □

Nhận xét 4.4. Các kết quả mà chúng tôi nhận được trong Định lý 4.2 và Định lý 4.3 có thể được coi là sự mở rộng của các kết quả trong [27, 35, 39] sang trường hợp điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho hệ nơ-ron rời rạc suy biến (4.5). Theo sự hiểu biết của chúng tôi, đây là lần đầu tiên bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ nơ-ron rời rạc suy biến với trễ biến thiên theo thời gian được đề cập. Tuy vậy, lưu ý rằng không giống với phần lớn các công trình thuộc dạng "lần đầu tiên" khác ở đó các tiêu chuẩn thường được cho dưới dạng độc lập với độ trễ (delay-independent criteria), các tiêu chuẩn của chúng tôi đều phụ thuộc vào độ trễ (delay-dependent), cụ thể hơn là phụ thuộc vào cả cận trên và cận dưới của độ trễ.

Nhận xét 4.5. Dựa trên kỹ thuật đã được sử dụng một cách hiệu quả để chứng minh tính $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ (3.3), để chứng minh Định lý 4.2 (và sau đó là Định lý 4.3), chúng tôi đã thiết kế một bộ các phiếm hàm kiểu Lyapunov–Krasovskii mới trong đó có sự tham gia của các hệ số δ^{k-1-s} và δ^{k-1-t}. Ở đây, δ vẫn giữ vai trò như một tham số hiệu chỉnh và (4.9), (4.16), (4.18), (4.34) & (4.37) sẽ trở thành các LMI khi ta cố định tham số δ này lại; vì thế, như đã bình luận trong Chương 3, chúng có thể được xử lý một cách dễ dàng bằng hộp công cụ LMI trong MATLAB [16]. Đây cũng là một ưu điểm đáng ghi nhận của hai định lý này của chúng tôi khi so sánh với: điều kiện (31) trong [36], các điều kiện (31), (40) & (49) trong [37] và điều kiện (22b) trong [61].

4.4. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Trong mục này, chúng tôi cung cấp hai ví dụ số để minh họa tính hiệu quả của các điều kiện đã thu được trong Định lý 4.2 và Định lý 4.3, tương ứng. Trong trường hợp hệ nơ-ron rời rạc (4.5) được đặc biệt hóa thành hệ không suy biến (tức $E = I$), các kết quả này của chúng tôi có thể được xem như sự mở rộng của các kết quả đã nêu trong Chương 3 và trong [35, 48].

Ví dụ 4.1. Xét hệ (4.5) với $u(k) = 0$ trong đó:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1.1 \\ 1 & -1.1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0.95 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} -0.025 & 0.02 \\ 0.015 & 0.025 \end{bmatrix},$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.01 \\ -0.025 & 0.02 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.35 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \ A_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.3 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \end{bmatrix}, \ R = \begin{bmatrix} 1.7 & 0 \\ 0 & 1.3 \end{bmatrix},$$

$$h(k) = 2 + 13\cos^2 \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Sau một vài thao tác tính toán đơn giản về mặt đại số, ta thấy

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad MEG = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Với $h_1 = 2,\ h_2 = 15,\ N = 60,\ d = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = 8$ và $\gamma = 1$, các bất đẳng thức ma trận (4.16)-(4.18) là giải được với $\delta = 1.0001$ và

$$P = \begin{bmatrix} 0.0078 & -0.1673 \\ -0.1673 & 12.0088 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.0899 & -0.0249 \\ -0.0249 & 0.0525 \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 7.5618 & -0.0008 \\ -0.0008 & 5.7823 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0.0017 & 0 \\ 0 & 0.0013 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = 17.7476, \quad \lambda_2 = 0.0646, \quad \lambda_3 = 4.4471, \quad \lambda_4 = 4.4506, \quad \lambda_5 = 0.0015.$$

Vì các bất đẳng thức (4.9) và (4.16) là tương đương, từ Định lý 4.1 và Định lý 4.2, ta khẳng định được rằng hệ đang xét là chính quy, nhân quả, có nghiệm duy nhất trong một lân cận của gốc và $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn ứng với $(1, 8, R, 60)$.

Ví dụ 4.2. Xét hệ nơ-ron rời rạc suy biến có trễ (4.5) trong đó

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1.1 \\ 1 & -1.1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0.35 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.015 \\ 0.01 & 0.02 \end{bmatrix},$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.015 \\ -0.02 & 0.025 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.45 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.15 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1.2 & 1 \\ 1 & 1.4 \end{bmatrix}, \quad h(k) = 2 + 12\sin^2 \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Tương tự như trong Ví dụ 4.1, ta thấy

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.55 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \; MEG = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Với $h_1 = 2,\ h_2 = 14,\ N = 40,\ d = 1,\ c_1 = 2,\ c_2 = 25$ và $\gamma = 1$, các bất đẳng thức ma trận (4.34)-(4.38) được nghiệm đúng với $\delta = 1.0001$ và

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0.1054 & 0.2102 \\ 0.2102 & 0.4589 \end{bmatrix}, \; U_2 = \begin{bmatrix} 0.0022 & 0.0048 \\ 0.0048 & 0.0107 \end{bmatrix}, \; U_3 = \begin{bmatrix} 0.0844 & 0.1942 \\ 0.1942 & 0.4585 \end{bmatrix},$$

$$U_4 = \begin{bmatrix} 0.0012 & 0.0032 \\ 0.0032 & 0.0102 \end{bmatrix}, \; V_1 = \begin{bmatrix} 0.5522 & 1.2965 \\ 1.2965 & 3.0661 \end{bmatrix}, \; V_2 = \begin{bmatrix} 0.0023 & 0.0049 \\ 0.0049 & 0.0110 \end{bmatrix},$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1.9826 & 4.5768 \\ 4.5768 & 10.8473 \end{bmatrix}, \; V_4 = \begin{bmatrix} 0.0869 & 0.2012 \\ 0.2012 & 0.4841 \end{bmatrix}, \; V_5 = \begin{bmatrix} 0.0018 & 0.0048 \\ 0.0048 & 0.0156 \end{bmatrix},$$

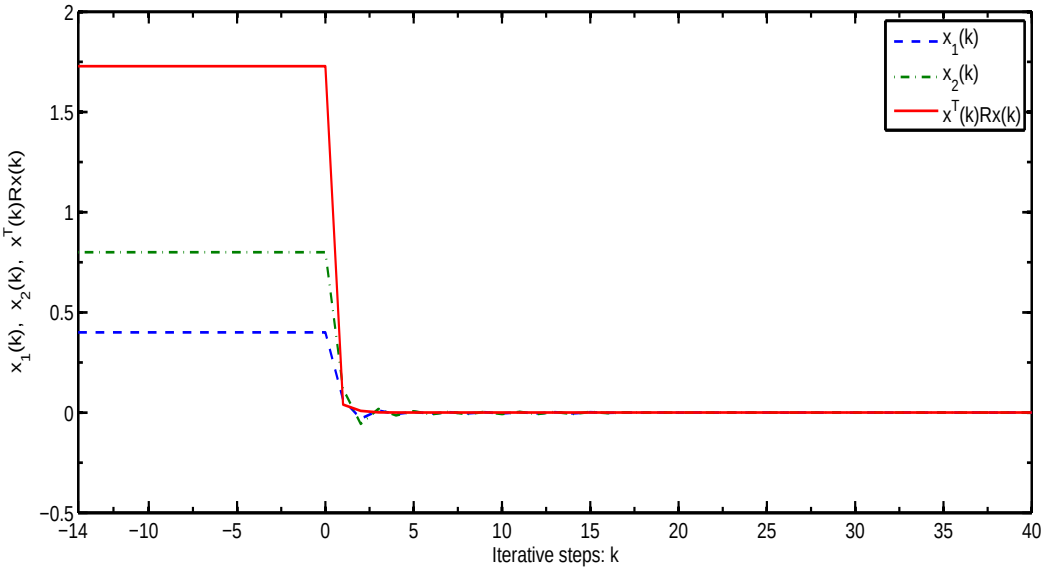
$$Y = \begin{bmatrix} -0.2115 & -1.0007 \end{bmatrix}.$$

Bởi Định lý 4.3, bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho hệ (4.5) có nghiệm và hàm điều khiển phản hồi được xác định bởi

$$u(k) = \begin{bmatrix} 27.1655 & -14.6259 \end{bmatrix} x(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Hình 4.1 minh họa nghiệm đáp ứng với điều kiện ban đầu

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \quad \forall k \in \{-14, -13, \ldots, 0\}.$$



Hình 4.1: Nghiệm đáp ứng của hệ đóng

KẾT LUẬN CHƯƠNG 4

Trong chương này, chúng tôi quan tâm đến bài toán ổn định và điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn của lớp hệ nơ-ron rời rạc suy biến có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng. Các kết quả đạt được là:

- Đưa ra một điều kiện đủ đảm bảo cho sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm của hệ trong lân cận của gốc.
- Đưa ra các điều kiện đủ đảm bảo tính $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn của hệ.
- Đưa ra các điều kiện đủ cho sự tồn tại một hàm điều khiển phản hồi đảm bảo tính điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn của lớp hệ đang xét.

Các điều kiện mà chúng tôi đề xuất đều là phụ thuộc trễ và có thể được kiểm tra một cách dễ dàng bằng cách sử dụng hộp công cụ điều khiển LMI của MATLAB.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. KẾT QUẢ ĐẠT ĐƯỢC

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho một số lớp hệ phương trình vi/sai phân có trễ biến thiên theo thời gian và nhận giá trị trong một khoảng. Các kết quả chính đạt được là:

- Thiết kế được một hàm điều khiển phản hồi giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ cho lớp hệ nơ-ron có trễ biến thiên hỗn hợp.
- Đề xuất được các điều kiện đủ đảm bảo tính $\mathcal{H}_\infty-$bị chặn trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ rời rạc tuyến tính có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng. Từ đó thiết kế một hàm điều khiển phản hồi giải bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ trong thời gian hữu hạn cho lớp hệ này.
- Thiết lập được các kết quả tương ứng cho lớp hệ nơ-ron rời rạc suy biến có trễ biến thiên theo thời gian dạng khoảng. Hơn nữa, với lớp hệ này, chúng tôi còn đồng thời chứng minh được tính chính quy, tính nhân quả và sự tồn tại duy nhất nghiệm của hệ trong lân cận của gốc.

2. KIẾN NGHỊ MỘT SỐ VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở có thể được tiếp tục nghiên cứu như:

- Nghiên cứu tính ổn định và bài toán điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ (trong thời gian hữu hạn) cho các lớp hệ phương trình vi/sai phân và điều khiển khác như: hệ phi tuyến, hệ chuyển mạch, hệ với bước nhảy Markov, ... có trễ biến thiên theo thời gian và nhận giá trị trong một khoảng.

- Nghiên cứu tính ổn định (trong thời gian hữu hạn) và thiết kế các điều khiển có dạng khác, chẳng hạn như điều khiển phụ thuộc hàm quan sát, cho các lớp hệ phương trình vi/sai phân và điều khiển có trễ biến thiên theo thời gian và nhận giá trị trong một khoảng.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] Le A. Tuan, Phan T. Nam and Vu N. Phat (2013), New $\mathcal{H}_\infty$ controller design for neural networks with interval time-varying delays in state and observation, *Neural Processing Letters*, Volume 37, Issue 3, 235-249. (SCIE)

[2] Le A. Tuan and Vu N. Phat (2016), Finite-time stability and $\mathcal{H}_\infty$ control of linear discrete-time delay systems with norm-bounded disturbances, *Acta Mathematica Vietnamica*, Volume 41, Number 3, 481-493. (SCOPUS)

[3] Le A. Tuan and Vu N. Phat (2018), Existence of solutions and finite-time stability for nonlinear singular discrete-time neural networks, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, Published Online: 13 February 2018, DOI: https://doi.org/10.1007/s40840-018-0608-y. (SCIE)

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Lê Văn Hiện (2010), *Tính ổn định của một số lớp hệ phương trình vi phân và điều khiển*, Luận án tiến sĩ toán học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

[2] Vũ Ngọc Phát (2001), *Nhập Môn Lý Thuyết Điều Khiển Toán Học*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[3] Nguyễn Hữu Sáu (2018), *Tính ổn định của hệ động lực tuyến tính suy biến có trễ*, Luận án tiến sĩ toán học, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

[4] Nguyễn Trường Thanh (2015), *Điều khiển $\mathcal{H}_\infty$ các hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên*, Luận án tiến sĩ toán học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc Gia Hà Nội.

Tiếng Anh

[5] F. Amato, R. Ambrosino, M. Ariola, C. Cosentino and G.D. Tommasi (2014), *Finite-Time Stability and Control*, Springer-Verlag, London.

[6] J. Bai, R. Lu, A. Xue, Q. She and Z. Shi (2015), "Finite-time stability analysis of discrete-time fuzzy Hopfield neural network", *Neurocomputing*, 159, 263-267.

[7] T. Botmart, P. Niamsup and V.N. Phat (2011), "Delay-dependent exponential stabilization for uncertain linear systems with interval non-

differentiable time-varying delays", *Applied Mathematics and Computation*, 217(21), 8236-8247.

[8] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan (1994), *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, 15 SIAM, Philadelphia.

[9] L. Dai (1989), *Singular Control Systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin.

[10] N.H. Du, V.H. Linh, V. Mehrmann and D.D. Thuan (2013), "Stability and robust stability of linear time-invariant delay differential-algebraic equations", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 34(4), 1631-1654.

[11] G-R. Duan (2010), *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*, Springer, New York.

[12] G-R. Duan and H-H. Yu (2013), *LMIs in Control Systems: Analysis, Design and Applications*, CRC Press, New York.

[13] B.A. Francis (1987), *A Course in $\mathcal{H}_\infty$ Control Theory*, Springer, Berlin.

[14] E. Fridman (2014), *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*, Springer International Publishing Switzerland.

[15] E. Fridman and U. Shaked (2003), "Delay-dependent stability and $\mathcal{H}_\infty$ control: constant and time-varying delays", *International Journal of Control*, 76(1), 48-60.

[16] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A.J. Laub and M. Chilali (1995), *LMI Control Toolbox for Use with Matlab*, The Math Works Inc.

[17] K. Glover and J. C. Doyle (1989). "A state space approach to $\mathcal{H}_\infty$ optimal control", in *Three Decades of Mathematical Systems Theory: A Collection*

of Surveys at the Occasion of the 50th Birthday of Jan C. Willems, H. Nijmeijer and J. M. Schumacher (Eds.), Springer-Verlag, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 135.

[18] K. Gu, V. Kharitonov and J. Chen (2003), *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhauser, Berlin.

[19] V.I. Hahanov and A.A. Rutkas (2009), "Descriptor neural networks with arbitrary characteristic index", *RadioElectronics & Informatics*, 4, 59-60.

[20] J.K. Hale and S.M. Verduyn Lunel (1993), *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.

[21] Y. He, G.P. Liu and D. Rees (2007), "New delay-dependent stability criteria for neural networks with time-varying delay", *IEEE Transactions on Neural Networks*, 18(1), 310-314.

[22] Y. He, M. Wu, Q-L. Han and J-H. She (2008), "Delay-dependent $\mathcal{H}_\infty$ control of linear discrete-time systems with an interval-like time-varying delay", *International Journal of Systems Science*, 39(4), 427-436.

[23] L.V. Hien, L. H. Vu and V.N. Phat (2015), "Improved delay-dependent exponential stability of singular systems with mixed interval time-varying delays", *IET Control Theory & Applications*, 9(9), 1364-1372.

[24] D. Hinrichsen and A.J. Pritchard (2010), *Mathematical Systems Theory I: Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness*, Springer, Berlin.

[25] X. Jiang and Q-L. Han (2005), "On $\mathcal{H}_\infty$ control for linear systems with interval time-varying delay", *Automatica*, 41, 2099-2106.

[26] G. Kamenkov (1953), "On stability of motion over a finite interval of time", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 17, 529-540 (in Russian).

[27] P.P. Kanjilal, P.K. Dey and D.N. Banerjee (1993), "Reduced-size neural networks through singular value decomposition and subset selection", *Electronics Letters*, 29(17), 1516-1518.

[28] V.L. Kharitonov (2013), *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*, Birkhauser, New York.

[29] V. Kolmanovskii and A. Myshkis (1999), *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, London.

[30] N.N. Krasovskii (1963), *Stability of Motion: Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay*, Stanford University Press, Stanford, California.

[31] P. Kunkel and V. Mehrmann (2006), *Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution*, European Mathematical Society, Zürich.

[32] O.M. Kwon and Ju H. Park (2009), "Exponential stability analysis for uncertain neural networks with interval time-varying delays", *Applied Mathematics and Computation*, 212(2), 530-541.

[33] J. Liu, J. Zhang, M. He and H. Zhang (2011), "New results on robust $\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time systems with interval time-varying delays", *Journal of Control Theory and Applications*, 9(4), 611-616.

[34] G. Lu, D.W.C. Ho and L. Zhou (2011), "A note on the existence of a solution and stability for Lipschitz discrete-time descriptor systems", *Automatica*, 47(7), 1525-1529.

[35] C.Y. Lu, W.J. Shyr, K.C. Yao, C.W. Liao and C.K. Huang (2009), "Delay-dependent $\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time uncertain recurrent neural net-

works with interval time-varying delay", *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 5(10B), 3483-3493.

[36] Y. Ma, L. Fu, Y. Jing and Q. Zhang (2015), "Finite-time $\mathcal{H}_\infty$ control for a class of discrete-time switched singular time-delay systems subject to actuator saturation", *Applied Mathematics and Computation*, 261, 264-283.

[37] Y. Ma, X. Jia and D. Liu (2016), "Robust finite-time $\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time singular Markovian jump systems with time-varying delay and actuator saturation", *Applied Mathematics and Computation*, 286, 213-227.

[38] S. Ma, C. Zhang and Z. Cheng (2008), "Delay-dependent robust $\mathcal{H}_\infty$ control for uncertain discrete-time singular systems with time-delays", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 217(1), 194-211.

[39] Y. Ma and Y. Zheng (2018), "Delay-dependent stochastic stability for discrete singular neural networks with Markovian jump and mixed time-delays", *Neural Computing and Applications*, 29(1), 111-122.

[40] K. Mathiyalagan, R. Sakthivel and S.M. Anthoni (2014), "Robust exponential stability and $\mathcal{H}_\infty$ control for switched neutral-type neural networks", *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 28(3-5), 429-443.

[41] W. Michiels and S-I. Niculescu (2014), *Stability, Control and Computation for Time-Delay Systems: An Eigenvalue-Based Approach,* 2nd Edition, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

[42] N.H. Muoi, G. Rajchakit and V.N. Phat (2016), "LMI approach to finite-time stability and stabilization of singular linear discrete delay systems", *Acta Applicandae Mathematicae*, 146(1), 81-93.

[43] S-I. Niculescu (2001), *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, Springer, London.

[44] I.R. Petersen, V.A. Ugrinovskii and A.V. Savkin (2000), *Robust Control Design Using $\mathcal{H}_\infty$ Methods*, Springer, London.

[45] V.N. Phat and H. Trinh (2010), "Exponential stabilization of neural networks with various activation functions and mixed time-varying delays", *IEEE Transactions on Neural Networks*, 21(7), 1180 - 1184.

[46] V.N. Phat and H. Trinh (2013), "Design of $\mathcal{H}_\infty$ control of neural networks with time-varying delays", *Neural Computing and Applications*, 22(1), 323-331.

[47] R. Sakthivel, K. Mathiyalagan and S.M. Anthoni (2012), "Delay-dependent robust stabilization and $\mathcal{H}_\infty$ control for neural networks with various activation functions", *Physica Scripta*, 85(4), 1-10.

[48] R. Sakthivel, K. Mathiyalagan and S.M. Anthoni (2012), "Robust $\mathcal{H}_\infty$ control for uncertain discrete-time stochastic neural networks with time-varying delays", *IET Control Theory & Applications*, 6(9), 1220-1228.

[49] S. Song, S. Ma and C. Zhang (2012), "Stability and robust stabilisation for a class of non-linear uncertain discrete-time descriptor Markov jump systems", *IET Control Theory & Applications*, 6(16), 2518-2527.

[50] H. Song, L. Yu, D. Zhang and W-A. Zhang (2012), "Finite-time $\mathcal{H}_\infty$ control for a class of discrete-time switched time-delay systems with quantized feedback", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(12), 4802-4814.

[51] A. Stoorvogel (1992), *The $\mathcal{H}_\infty$ Control Problem: A State-Space Approach*, Prentice-Hall, New York.

[52] M.V. Thuan and V.N. Phat (2012), "New criteria for stability and stabilization of neural networks with mixed interval time-varying delays", *Vietnam Journal of Mathematics*, 40(1), 79-93.

[53] T.T.H. Trang, V.N. Phat and S. Adly (2016), "Robust finite-time $\mathcal{H}_\infty$ control of nonlinear time-varying delay systems", *Journal of Industrial and Management Optimization*, 12(1), 303-315.

[54] W.R. Wade (2009), *An Introduction to Analysis*, 4th Edition, Prentice Hall, New Jersey.

[55] R. Wang and S. Ma (2013), "Stability and stabilization for nonlinear discrete-time singular Markov jump systems with time-varying delay", *In: Proceedings of 25th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, 3874-3879.

[56] K. Wang, Y. Shen, W. Liu and Q. Jiang (2010), "Finite-time $\mathcal{H}_\infty$ control for a class of discrete-time linear system", *In: Proceedings of 2010 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, 546-549.

[57] M. Wu, Y. He and J-H. She (2010), *Stability Analysis and Robust Control of Time-Delay Systems*, Springer-Verlag, Berlin.

[58] W. Xiang and J. Xiao (2011), "$\mathcal{H}_\infty$ finite-time control for switched nonlinear discrete-time systems with norm-bounded disturbance", *Journal of the Franklin Institute*, 348(2), 331-352.

[59] S. Xu and J. Lam (2006), *Robust Control and Filtering of Singular Systems*, Springer, Berlin.

[60] S. Zhang and M-P. Chen (1998), "A new Razumikhin theorem for delay difference equations", *Computers & Mathematics with Applications*, 36(10-12), 405-412.

[61] Y. Zhang, P. Shi, S.K. Nguang and Y. Song (2014), "Robust finite-time $\mathcal{H}_\infty$ control for uncertain discrete-time singular systems with Markovian jumps", *IET Control Theory & Applications*, 8(12), 1105-1111.

[62] Y. Zhang, P. Shi, S.K. Nguang, J. Zhang and H.R. Karimi (2014), "Finite-time boundedness for uncertain discrete neural networks with time-delays and Markovian jumps", *Neurocomputing*, 140, 1-7.

[63] Z. Zhang, H. Zhang, B. Zheng and H.R. Kamiri (2014), "Finite-time stability analysis and stabilization for linear discrete-time system with time-varying delay", *Journal of the Franklin Institute*, 351(6), 3457-3476.

[64] K. Zhou, J.C. Doyle and K. Glover (1995), *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, New Jersey.

[65] G. Zong, R. Wang, W. Zheng and L. Hou (2015), "Finite-time $\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time switched nonlinear systems with time delay", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25(6), 914-936.

[66] Z. Zuo, H. Li and Y. Wang (2013), "New criterion for finite-time stability of linear discrete-time systems with time-varying delay", *Journal of the Franklin Institute*, 350(9), 2745-2756.